TD 9 - Calcul matriciel

1. CALCUL MATRICIEL

Exercice 1 Calculer les produits matriciels suivants $A \times B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. A quels ensembles appartiennent respectivement ${}^t XX$ et $X\,{}^t X$?
2. Les calculer.

Exercice 3 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 12 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices AB et BA.
2. Calculer $(AB)^2$.

Exercice 4 Soient A et B deux matrices dans $M_n(\mathbf{R})$ qui commutent. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

Application : si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calculer pour tout entier k, A^k en décomposant A comme la somme de deux matrices qui commutent.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit les matrices élémentaires de $M_n(\mathbf{R})$ (notées $E_{i,j}$) qui ont des zéros sur tous leurs coefficients sauf le coefficient de coordonnées (i,j) qui vaut 1.

Pour tout (i,j) et (k,ℓ), calculer le produit $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$.

Exercice 6 Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice contenant uniquement des 1.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}, A^k$.
2. En déduire une formule pour $(\lambda I_n + J)^k$ à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 7 Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D.
3. En déduire que pour tout entier n, $D^n = P^{-1}M^nP$.
4. En déduire une formule pour M^n.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Calculer $P(A)$.
2. Soit $n \in N$. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par P.
3. En déduire une formule pour A^n.

Exercice 9 Montrer, par analyse synthèse, que toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 10 On cherche à calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les premiers termes. Conjecturer une formule à démontrer par récurrence.

Exercice 11 **Commutant d'une matrice diagonalisable. Exercice très classique !**

1. Soit $D \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale **à coefficients distincts**. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D.
2. Montrer que l'ensemble trouvé est égal à

$$\{Q(D), Q \in \mathbf{R}[x]\}.$$

3. On dit que A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$. Soit $C \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que C commute avec A si et seulement si $P^{-1}CP$ commute avec B.

4. On dit qu'une matrice M est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}MP = D$.
5. Soit M une matrice diagonalisable. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$.
6. Déterminer les matrices qui commutent avec M.
7. Montrer que l'ensemble trouvé est égal à

$$\{Q(M), Q \in \mathbf{R}[x]\}.$$

2. MATRICES INVERSIBLES

Exercice 12 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 Montrer qu'une matrice $(2,2)$ est inversible si et seulement si ses colonnes sont non proportionnelles.

Exercice 14 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbf{R}.$$

Exercice 15 A l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que tout matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |A_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{i,j}|$$

est inversible. (On dit qu'une telle matrice est à diagonale dominante).

Exercice 16 On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est nilpotente si et seulement si il existe un entier k tel que $A^k = 0_n$. Soit A une telle matrice

1. Expliquer pourquoi il existe un plus un plus petit entier m tel que $A^m = 0_n$.
2. Montrer que $I_n - A$ est inversible. On pourra considérer la matrice

$$B = \sum_{j=0}^{m-1} A^j.$$

3. COMPLÉMENTS

Exercice 17 Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice telle qu'il existe $B \in M_n(\mathbf{R})$ non nulle telle que $AB = 0_n$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 18 On dit qu'une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est stochastique si la comme de ses coefficients sur chaque ligne vaut 1 et si chacun de ses coefficients est positif. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques et une matrice stochastique.

Exercice 19 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble $\{M \in M_2(\mathbf{R}), AM = MA\}$.

Exercice 20 Soient A et B dans $M_n(\mathbf{R})$ des matrices **nilpotentes** (M est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbf{N}, M^k = 0$) qui commutent.

1. Montrer que AB et A + B sont nilpotentes.
2. Montrer que A et B ne sont pas inversibles.

Exercice 21 On définit la trace d'une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ par

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} M_{k,k}.$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda\,\mathrm{Tr}(B)$.
2. Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. Montrer que pour tout matrice $P \in M_n(\mathbf{R})$ inversible, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.
4. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}(A\,{}^tA) \geqslant 0$ et $\mathrm{Tr}(A\,{}^tA) = 0 \iff A = 0_n$.

Exercice 22 Soit $A, B \in M_n(\mathbf{R})^2$ telles que $AB - BA = A$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
2. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$A^kB - BA^k = kA^k.$$

Exercice 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A$
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_2.
3. Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.
4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale à déterminer.
5. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Donner l'expression explicite de A^n.
   On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2}, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

7. Calculer les premiers termes de la suite.

8. Dans la suite du sujet, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n + B$.
9. Résoudre l'équation $AY+B = Y$, d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. On notera L la matrice solution obtenue.
10. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L.$$

11. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}.$$

Exercice 24 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P(x) = x^2 - 3x + 2$ un polynôme. Montrer que $P(M) = 0_2$.
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme $R(x) = a_n x + b_n$ de degré strictement inférieur à 2 et un polynôme Q_n tels que

$$x^n = Q_n(x)P(x) + R(x).$$

En utilisant les racines de P déterminer a_n et b_n.
3. En déduire une formule pour M^n.

Exercice 25 On définit deux suites par

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = u_n + v_n \\ v_{n+1} & = -u_n + 4v_n \end{cases}.$$

On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = A^n X_0$.
2. Montrer que $A^2 = 5A - 6I_2$.
3. Montrer qu'il existe deux suites a_n et b_n telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, A^n = a_n A + b_n I_2$$

et qu'elles vérifient la relation de récurrence

$$a_{n+2} = 5a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = -6a_n.$$

4. Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n.$$

6. Déterminer une expression explicite pour la suite a_n et la suite b_n.
7. En déduire une formule pour A^n.
8. En déduire une formule pour u_n et v_n.