DEVOIR MAISON # 10

Commutant d'une matrice diagonalisable.

Définition 1 | Commutant d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, le commutant de la matrice A est l'ensemble

$$C_A = \{M \in M_n(\mathbf{R}), AM = MA\}.$$

1. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $(I, M, M^2, \dots M^{n^2})$ est liée. En déduire que M admet un polynôme annulateur.
2. **[Commutant d'une matrice de taille 3]** Dans cette question, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que C_D est un espace vectoriel.
   b) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$, montrer que
   $$M \in C_D \iff M \text{ est diagonale.}$$
   c) En déduire une base de C_D et sa dimension.
   d) Soit P le polynôme défini par
   $$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$
   Montrer que $P(D) = 0_3$. En déduire que (I, D, D^2, D^3) est liée.
   e) Soit $G = \mathrm{Vect}(I, D, D^2)$. Montrer que (I, D, D^2) est libre. En déduire la dimension de G.
   f) Montrer que $G \subset C_D$ puis que $G = C_D$. (Pour démontrer l'égalité, pensez à la dimension!)
   g) Montrer que $G = \{P(D), P \in \mathbf{R}[x]\}$.
3. **[Commutant d'une matrice diagonale à coefficients distincts]** Dans cette partie $D \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice diagonale fixée. On note $(d_1, \dots, d_n)$ ses coefficients diagonaux et on suppose qu'ils sont distincts deux à deux et qu'ils sont non nuls. On rappelle que
   $$C_D = \{M \in M_n(\mathbf{R}), DM = MD\}.$$
   a) Montrer que C_D est un espace vectoriel.
   b) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$, montrer que
   $$M \in C_D \iff \forall (i,j) \in [\![1, n]\!], d_i M_{i,j} = d_j M_{i,j}.$$
   c) En déduire que C_D est l'ensemble des matrices diagonales. Donner une base de C_D ainsi que sa dimension.

d) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^n)$ est liée.
e) En déduire que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\mathrm{D}^k, k \in \mathbf{N})$.
f) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est libre.
Indication : on montrera que si $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathrm{D}^i = 0_n$ alors le polynôme $\mathrm{P}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i$ admet $d_1, \dots, d_n$ comme racines.
g) En déduire que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est une base de G.
h) Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{C}_\mathrm{D}$, puis que $\mathrm{G} = \mathrm{C}_\mathrm{D}$.

4. **[Commutant d'une matrice diagonalisable]** Dans cette question, $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice telle qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ inversible telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ est une matrice diagonale à coefficients distincts non nuls.
a) Montrer que $\mathrm{C}_\mathrm{A} = \{\mathrm{PNP}^{-1}, \mathrm{N} \in \mathrm{C}_\mathrm{D}\}$.
b) En déduire que $\mathrm{C}_\mathrm{A} = \{\mathrm{Q}(\mathrm{M}), \mathrm{Q} \in \mathbf{R}[x]\}$.
c) En déduire la dimension de C_A.
d) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \dots \mathrm{A}^n)$ est liée et en déduire qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbf{R}_n[x]$, $\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = 0_n$.