DEVOIR MAISON # 10
Commutant d'une matrice diagonalisable.

Définition 1 | Commutant d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, le commutant de la matrice A est l'ensemble

$$C_A = \{M \in M_n(\mathbf{R}), AM = MA\}.$$

1. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $(I, M, M^2, \ldots M^{n^2})$ est liée. En déduire que M admet un polynôme annulateur.
2. **[Commutant d'une matrice de taille 3]** Dans cette question, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que C_D est un espace vectoriel.
   b) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$, montrer que
   $$M \in C_D \iff M \text{ est diagonale.}$$
   c) En déduire une base de C_D et sa dimension.
   d) Soit P le polynôme défini par
   $$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$
   Montrer que $P(D) = 0_3$. En déduire que (I, D, D^2, D^3) est liée.
   e) Soit $G = \text{Vect}(I, D, D^2)$. Montrer que (I, D, D^2) est libre. En déduire la dimension de G.
   f) Montrer que $G \subset C_D$ puis que $G = C_D$. (Pour démontrer l'égalité, pensez à la dimension!)
   g) Montrer que $G = \{P(D), P \in \mathbf{R}[x]\}$.
3. **[Commutant d'une matrice diagonale à coefficients distincts]** Dans cette partie $D \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice diagonale fixée. On note $(d_1, \ldots, d_n)$ ses coefficients diagonaux et on suppose qu'ils sont distincts deux à deux et qu'ils sont non nuls. On rappelle que
   $$C_D = \{M \in M_n(\mathbf{R}), DM = MD\}.$$
   a) Montrer que C_D est un espace vectoriel.
   b) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$, montrer que
   $$M \in C_D \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!], d_i M_{i,j} = d_j M_{i,j}.$$
   c) En déduire que C_D est l'ensemble des matrices diagonales. Donner une base de C_D ainsi que sa dimension.

d) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}^n)$ est liée.

e) En déduire que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\mathrm{D}^k, k \in \mathbf{N})$.

f) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}^{n-1})$ est libre.
Indication : on montrera que si $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathrm{D}^i = 0_n$ alors le polynôme $\mathrm{P}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i$ admet $d_1, \ldots, d_n$ comme racines.

g) En déduire que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}^{n-1})$ est une base de G.

h) Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{C}_\mathrm{D}$, puis que $\mathrm{G} = \mathrm{C}_\mathrm{D}$.

4. **[Commutant d'une matrice diagonalisable]** Dans cette question, $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice telle qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ inversible telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ est une matrice diagonale à coefficients distincts non nuls.
   a) Montrer que $\mathrm{C}_\mathrm{A} = \{\mathrm{PNP}^{-1}, \mathrm{N} \in \mathrm{C}_\mathrm{D}\}$.
   b) En déduire que $\mathrm{C}_\mathrm{A} = \{\mathrm{Q}(\mathrm{M}), \mathrm{Q} \in \mathbf{R}[x]\}$.
   c) En déduire la dimension de C_A.
   d) Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \ldots \mathrm{A}^n)$ est liée et en déduire qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbf{R}_n[x]$, $\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = 0_n$.

PROBLÈME 2 - COMMUTANT D'UNE MATRICE DIAGONALE

Définition 2 | Commutant d'une matrice

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, le commutant de la matrice A est l'ensemble

$$\mathrm{C}_\mathrm{A} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}), \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}.$$

1. La famille est de cardinal n^2+1 qui est strictement supérieur à n^2 qui est la dimension de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ donc elle est liée. Donc il existe des réels non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i \mathrm{M}^i = 0_n.$$

Si on pose $\mathrm{P}(x) = \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i x^i$, on a bien $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0$.

2. **[Commutant d'une matrice de taille 3]** Dans cette question, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Montrons que C_D est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$.
   - Par définition $\mathrm{C}_\mathrm{D} \subset \mathrm{M}_3(\mathbf{R})$.
   - C_D est non vide car $0_3\mathrm{D} = \mathrm{D}0_3$ donc $0_3 \in \mathrm{C}_\mathrm{D}$.
   - Soient A, B dans C_D et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B})\mathrm{D} &= \mathrm{AD} + \lambda\mathrm{BD} \\ &= \mathrm{DA} + \lambda\mathrm{DB} \\ &= \mathrm{D}(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B}).\end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B} \in \mathrm{C}_\mathrm{D}$.

C_D est donc un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$ donc c'est un espace vectoriel.

b) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}
M \in C_D &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} b = 2b \\ c = 3c \\ d = 2d \\ 2f = 3f \\ g = 3g \\ h = 2h \end{cases} \\
&\iff b = c = d = f = g = h = 0 \\
&\iff \text{M est diagonale.}
\end{aligned}$$

c) Une base de C_D est donc $E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}$ est la dimension de C_D est 3.

d) Calcul direct. En développant le polynôme on obtient une combinaison linéaire nulle des 4 matrices données.

e) Soient a, b, c des réels tels que $aI_2 + bD + cD^2 = 0_3$ alors

$$\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+2b+4c & 0 \\ 0 & 0 & a+3b+9c \end{pmatrix} = 0_3$$

donc on obtient le système

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a+2b+4c = 0 \\ a+3b+9c = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0,0,0)$ donc la famille est libre. On en déduit que I, D, D_2 est une base de G (car elle est génératrice par définition) donc $\dim G = 3$.

f) Soit $M \in C_D$, il existe a, b, c tels que $M = aI_2 + bD + cD^2$ et on a

$$\begin{aligned} MD &= (aI_2 + bD + cD^2)D \\ &= aD + bD^2 + cD^3 \\ &= D(aD + bD + cD^2) \\ &= DM. \end{aligned}$$

Donc $M \in C_D$. Ainsi $G \subset C_D$.
Comme les deux espaces sont de dimension 3, on et qu'on a une inclusion, on obtient $G = C_D$.

3. **[Commutant d'une matrice diagonale à coefficients distincts]** Dans cette partie $D \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice diagonale fixée. On note $(d_1, \dots, d_n)$ ses coefficients diagonaux et on suppose qu'ils sont distincts deux à deux et qu'ils sont non nuls. On rappelle que

$$C_D = \{M \in M_n(\mathbf{R}), DM = MD\}.$$

a) Montrons que C_D est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$.
- Par définition $C_D \subset M_n(\mathbf{R})$.
- C_D est non vide car $0_n D = D0_n$ donc $0_n \in C_D$.
- Soient A, B dans C_D et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned} (A + \lambda B)D &= AD + \lambda BD \\ &= DA + \lambda DB \\ &= D(A + \lambda B). \end{aligned}$$

Ainsi $A + \lambda B \in C_D$.

C_D est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ donc c'est un espace vectoriel.

b) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On calcule pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$

$$(MD)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} D_{k,j} = M_{i,j} D_{j,j} = M_{i,j} d_j$$

car un seul terme de la somme n'est pas nul. De même $(DM)_{i,j} = d_i M_{i,j}$. Ainsi

$$M \in C_D$$

c) L'équivalence précédente devient, si $i \neq j$, $(d_i - d_j)M_{i,j} = 0$ soit $M_{i,j} = 0$ car $d_i \neq d_j$. Si $i = j$ l'égalité est toujours vérifiée. C_D est donc l'ensemble des matrices diagonales. Il est de dimension n est un base $(E_{i,i})_{i \in \{1, \dots n\}}$.

d) $(I, D, \dots, D^n)$ est une famille de C_D de cardinal $n + 1 > \dim C_D$ donc elle est liée.

e)

f) Montrons que $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathrm{D}_k = 0_n.$$

Le calcul donne

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_1^k & 0 & & \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_2^k & 0 & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_n^k \end{pmatrix} = 0_n.$$

Donc le polynôme $\mathrm{Q}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k$ admet $d_1, \dots, d_n$ comme racines, donc n racines au moins, alors que son degré est au maximum $n-1$, c'est donc le polynôme nul, donc ses coefficients, les λ_k sont nuls. La famille est donc libre.

g) $(\mathrm{I}, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{D}^{n-1})$ est libre et génératrice de G donc c'est une base de G.

h) On montre que $\mathrm{G} \subset \mathrm{C}_\mathrm{D}$ comme dans le cas $n = 3$. De plus, les deux espaces sont de dimension n donc ils sont égaux.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.