DEVOIR MAISON # 11

1. PROBABILITÉS : MODÈLE DE GALTON-WATSON

Un modèle de croissance probabiliste pour une population est le modèle de Galton-Watson. On considère une population dont on va décrire l'évolution génération par génération. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n est la variable aléatoire qui compte nombre d'individus à la génération n. On considère que :

- Les générations ne se superposent pas,
- Chaque individu a un nombre aléatoire de descendants : le nombre de descendants d'un individu est une variable aléatoire. Les variables aléatoires pour chacun sont indépendantes et de même loi.

On s'intéresse aux conditions sous lesquelles on a extinction ou survie de l'espèce. On dit que la lignée est éteinte à la génération n si $Z_n = 0$ et on souhaite étudier la suite de terme général $P(Z_n = 0)$.

Formellement, le modèle est donné par

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

où les variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont **indépendantes** et **de même loi**. $X_{n,i}$ est le nombre de descendants de l'individu numéro i de la génération n. On notera Y une autre variable aléatoire qui suit la même loi que les variables $X_{n,i}$.

Par exemple, si $Z_n = 12$ alors $Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,12}$. Z_{n+1} est la somme du nombre de descendants de chacun des 12 individus de la génération n.

On remarquera que comme $Z_0 = 1$, $Z_1 = X_{0,1}$ qui est le nombre de descendants de l'unique individu de la génération 0. Ainsi Z_1 et Y suivent la même loi.

1. Que se passe-t-il si toutes les variables $X_{n,i}$ sont constantes égales à $q \in \mathbb{N}$?
2. Dans cette question, on suppose que le nombre de descendants de chaque individu suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et que

   $$P(Z_n = 1) = p^n.$$

   En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0)$.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = P(Z_n = 0)$. u_n est la probabilité que la lignée soit éteinte à la génération n. Justifier que (u_n) est croissante puis qu'elle converge.

   Dans la suite du sujet, on appelle la limite de (u_n) **la probabilité d'extinction de la lignée.**
4. **Étude complète dans un cas simple.**
   Dans cette question uniquement, la loi de reproduction est la suivante : chaque individu a une probabilité $p \in]0,1]$ de donner deux descendants, par exemple en se divisant, et $1-p$ de disparaître sans descendant.
   a) Donner l'ensemble des valeurs prises par Z_1 ainsi que sa loi de probabilité. Calculer $E(Z_1)$ et $V(Z_1)$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P(Z_{n+1} = 0) = (1-p)P_{(Z_1=0)}(Z_{n+1} = 0) + pP_{(Z_1=2)}(Z_{n+1} = 0).$$
   c) Justifier, avec une phrase, que $P_{(Z_1=2)}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2.$$
   d) En déduire que les deux limites possibles de (u_n) sont 1 et $\frac{1-p}{p}$.
   e) Montrer que si $p \leqslant \frac{1}{2}$, la probabilité d'extinction vaut 1. Commenter ce résultat.
   f) Si $p > \frac{1}{2}$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$u_n \leqslant \frac{1-p}{p} < 1.$$
   En déduire la valeur de la probabilité d'extinction. Commenter ce résultat.
   g) Tracer la probabilité d'extinction en fonction de $E(Z_1)$.
5. Dans cette question uniquement, on suppose que la loi de reproduction est donnée par
   $$\forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k) = p^k(1-p),$$
   pour une certaine valeur $p \in]0,1[$ fixée.
   a) On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0) = u_n^k$. En utilisant un système complet d'événements associé à Z_1, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1-p}{1-pu_n}.$$
   b) On admet que (u_n) converge vers la plus petite des solutions de l'équation (d'inconnue ℓ)
   $$\ell = \frac{1-p}{1-p\ell}.$$
   Déterminer la probabilité d'extinction en fonction de p.

c) Reconnaître la loi de $Y+1$. En déduire que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i. la probabilité d'extinction vaut 1.
   ii. $E(Y) \leqslant 1$.

   Commenter.

2. ANALYSE

2.1. Étude des intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose :
$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Étudier les variations de la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$
4. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$, puis que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

2.2. Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
2. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 .
   b) En déduire que : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.
3. a) Déterminer la nature de la série de terme général $(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ.

4. À l'aide des résultats de la partie I, déterminer la valeur de ℓ.
5. Démontrer alors la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$