DEVOIR MAISON 1

A rendre pour le 16 septembre 2023

Exercice 1 Soient x et y des réels, mettre les expressions suivantes sous la forme $x^n y^m$ où n et m sont des entiers.

1. $\frac{x^3y^2}{x^4y}$
2. $\left(\frac{xy}{x^2y}\right)^2 \times \frac{xy}{(xy)^3}$
3. $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-2}$

Corrigé

1. $x^{-1}y$
2. $x^{-2} \times x^{-2}y^{-2} = x^{-4}y^{-2}$
3. $x^{-2}y^{-4}$

Exercice 2 Résoudre l'inéquation suivante :

$$e^{2x} - 4e^x + 3 > 0.$$

Corrigé

Posons $X = e^x$. L'inéquation devient

$$X^2 - 4X + 3 > 0.$$

On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 4 > 0$ qui admet donc deux racines distinctes

$$X_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$$

D'après le signe du coefficient dominant, le polynôme est positif en dehors des racines donc si et seulement si

$$X \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[.$$

Comme X est nécessairement positif car $X = e^X$, il faut se restreindre à

$$\begin{aligned} & X \in]0,1[\text{ ou } X \in]3,+\infty[\\ \iff & x \in]-\infty, 0[\text{ ou } x \in]\ln(3), +\infty[\end{aligned}$$

par stricte croissance de ln.

Exercice 3 Établir que $f : x \in \mathbf{R} \mapsto (x-1)^3 - (x+1)^3$ est une fonction polynomiale de degré 2 dont on :

- trouvera les racines
- déterminera la forme canonique
- donnera le sens de variation.

Exercice 4 Après avoir trouvé une racine évidente de $P(x) =$

$x^3 - x^2 - x + 1$, écrire P sous forme factorisée.

Exercice 5 Déterminer une expression explicite de la suite définie par

$$u_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = -u_n + 1.$$

La suite admet-elle une limite? si oui, la déterminer.

Corrigé

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On cherche son point fixe ℓ :

$$\begin{aligned} \ell = -\ell + 1 &\iff 2\ell = 1 \\ &\iff \ell = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On pose $v_n = u_n - \ell$. On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= -u_n + 1 - \frac{1}{2} \\ &= -u_n + \frac{1}{2} \\ &= -v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc géométrique et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_n = (-1)^n v_0 = (-1)^n (u_0 - \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}(-1)^n.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{3(-1)^n - 1}{2}.$$

Cette suite n'a pas de limite, sinon $(-1)^n$ en aurait une.

Exercice 6 Soit $p \in [0,1]$. On considère le polynôme de degré 2

$$\mathrm{Q}(x) = px^2 - x + 1 - p.$$

1. Déterminer le nombre de racines réelles de Q en fonction du signe de

$$1 - 4p + 4p^2$$

Corrigé

Le discriminant de Q est $1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2$. Si celui-ci est strictement positif, Q a deux racines, s'il est nul Q a une racine et s'il est strictement négatif Q n'a pas de racine.

2. En déduire que Q admet deux racines réelles distinctes si $p \neq \frac{1}{2}$ et une unique racine (double) si $p = \frac{1}{2}$.

Corrigé

$1-4p+4p^2$ est un trinôme du second degré (en p) de discriminant nul. Donc il a une unique racine, que l'on calcule égale à $\frac{1}{2}$. Ainsi si $p=\frac{1}{2}$, Q a une unique racine d'après la question 1, et sinon, comme le coefficient dominant est 4, le trinôme est strictement positif, donc Q admet deux racines.

3. Justifier que les racines sont $x_1=\frac{1-p}{p}$ et $x_2=1$.

Corrigé

Calcul simple.

4. En fonction de p, déterminer la plus petite racine entre x_1 et x_2.

Corrigé

On raisonne par équivalence

$$\begin{aligned} x_1<x_2 &\iff \frac{1-p}{p}<1 \\ &\iff 1-p<p \text{ car } p\geqslant 0 \\ &\iff 1<2p \\ &\iff p>\frac{1}{2} \end{aligned}$$

De même :

- si $p<\frac{1}{2}$, $x_2<x_1$
- si $p=\frac{1}{2}$, $x_2=x_1$.

5. Étudier $p\mapsto\frac{1-p}{p}$ pour $p\in[\frac{1}{2},1]$.

Corrigé

On dérive la fonction $h: p\mapsto\frac{1-p}{p}$ qui est un quotient de fonctions dérivables. On obtient

$$\forall p\in[\frac{1}{2},1], h'(p)=\frac{-p-1+p}{p^2}=\frac{-1}{p^2}<0$$

Donc h est strictement décroissante et on peut donner son tableau de variation :

p	$\frac{1}{2}$	1
$h(p)$	1 $\searrow$	0

6. On note g la fonction qui à $p\in[0,1]$ associe la plus petite racine entre x_1 et x_2. Tracer la valeur de $g(p)$ en fonction de p.

Corrigé

Si $p\leqslant\frac{1}{2}$, $g(p)=x_2=1$, si $p>\frac{1}{2}$, $g(p)=\frac{1-p}{p}$ et donc la

fonction est strictement décroissante de 1 (en $\frac{1}{2}$) et 0 (en 1).
On obtient le tracé suivant :