DM # 2

Devoir à rendre le 14 octobre.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation

$$|x^2 - 5x + 6| \leqslant |5 - x|.$$

Exercice 2 Simplifier

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i+3}{2i-1}.$$

Exercice 3 Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2}^{-3n+1}$
2. $\prod_{k=1}^{n} q^k (q \in \mathbb{R})$
3. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$
4. $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$

Exercice 4 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{p} (i+j) \right).$$

1. Exprimer $\prod_{j=1}^{p}(i+j)$ avec des factorielles.
2. En déduire que $S = p! \sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{i}$.
3. Montrer, par récurrence sur n que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{i} = \binom{p+1+n}{p+1}$$ et déduire la valeur de S.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij.$$

Exercice 6

1. Trouver une suite u_n de forme $u_n = (a + bn)3^n$ telle que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = n3^n$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k3^k$.

Exercice 7 Soit $X = \{\frac{1}{x}, x \in]0, +\infty[\}$. Déterminer si X admet un minimum, un maximum, et des bornes inférieures et supérieures.

Exercice 8 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \text{ et } g : x \mapsto \frac{\ln(4 - x^2)}{x^2 - 1}.$$