DM # 2

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation

$$|x^2 - 5x + 6| \leqslant |5 - x|.$$

Exercice 2 Simplifier

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i+3}{2i-1}.$$

Corrigé

C'est un produit télescopique. Cela se voit en réalisant le changement de variable $i = i' - 2 \iff i' = i + 2$ dans le numérateur. On obtient

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \frac{2i+3}{2i-1} &= \frac{\prod_{i=1}^{n} 2i+3}{\prod_{i=1}^{n} 2i-1} \\
&= \frac{\prod_{i'=3}^{n+2} 2(i'-2)+3}{\prod_{i=1}^{n} 2i-1} \\
&= \frac{\prod_{i'=3}^{n+2} 2i'-1}{\prod_{i=1}^{n} 2i-1} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+3)}{1 \times 3} \frac{\prod_{i=3}^{n} 2i-1}{\prod_{i=3}^{n} 2i-1} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2}^{-3n+1}$
2. $\prod_{k=1}^{n} q^k (q \in \mathbb{R})$
3. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$
4. $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$

Corrigé

1. La quantité à sommer ne dépend pas de k donc la somme vaut. $n\sqrt{2}^{-3n+1}$

2.

$$\prod_{k=1}^{n} q^k = q^{\sum_{k=1}^{n} k} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

3.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n} k+1}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= \frac{n+1}{1} \text{ par télescopage} \\ &= n+1.\end{aligned}$$

4. On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} \\ &= (2+1)^n \text{ par la formule du binôme} \\ &= 3^n.\end{aligned}$$

Exercice 4 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer

$$S = \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right).$$

1. Exprimer $\prod_{j=1}^{p}(i+j)$ avec des factorielles.
2. En déduire que $S = p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i}$.
3. Montrer, par récurrence sur n que

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i} = \binom{p+1+n}{p+1} \text{ et déduire la valeur de S.}$$

Corrigé

1.

$$\prod_{j=1}^{p}(i+j) = (i+1)\times(i+2)\times\ldots(i+p) = \frac{(i+p)!}{i!}.$$

2.

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{n} p!\frac{(i+p)!}{i!p!} \\ &= p!\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!p!} \\ &= p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i}.\end{aligned}$$

3. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Initialisation. Pour $n = 0$, la somme vaut $\binom{p}{0} = 1$ et le terme de droite vaut $\binom{p+1}{p+1} = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que l'égalité est vraie au rang n. On la montre au rang suivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}\binom{i+p}{i} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i} + \binom{p+n+1}{n} \\
&= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{n+1} \text{ (par H.R.)} \\
&= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} \\
&\text{car } \binom{p+n+1}{n+1} = \binom{p+n+1}{p} \text{ par symétrie.} \\
&= \binom{p+n+2}{p+1} \text{ par la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

d'où la propriété au rang $n+1$. Par principe de récurrence la propriété est donc vraie pour tout n. On en déduit que

$$S = p!\binom{p+n+1}{p+1}.$$

Remarque On pouvait aussi utiliser les factoriels plutôt que la symétrie des coefficients binomiaux.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij.$$

Corrigé

On calcule la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} ij\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i\left(\sum_{j=i+1}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{(n-i)(i+1+n)}{2}\\
&\text{(on reconnait une somme arithmétique)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i(ni+n+n^2-i^2-i-ni)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} -i^3-i^2+(n+n^2)i\\
&= \frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{n-1} i^3-\sum_{i=1}^{n-1} i^2+(n+n^2)\sum_{i=1}^{n-1} i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^3-\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{12}\\
&+\frac{(n+n^2)n(n-1)}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 6

1. Trouver une suite u_n de forme $u_n=(a+bn)3^n$ telle que pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n=n3^n$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k3^k$.

Corrigé

1. Soient a et b des réels et $n\in\mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n=n3^n &\iff (b(n+1)+a)3^{n+1}-(bn+a)3^n=n3^n\\
&\iff (bn+b+a)\times 3\times 3^n-(bn+a)3^n=n3^n\\
&\iff (2bn+(3b+2a))3^n=n3^n\\
&\iff 2bn+2b+4a=n.
\end{aligned}$$

Il suffit donc d'avoir $2b=1$ et $3b+2a=0$, soit $b=\frac{1}{2}$ et $a=3b/2=-\frac{3}{4}$.

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k3^k &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}-u_k\\
&= u_{n+1}-u_0 \text{ par télescopage}\\
&= \left(\frac{n}{2}-\frac{3}{4}\right)3^n+\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 7

Soit $X=\{\frac{1}{x}, x\in]0,+\infty[\}$. Déterminer si X admet un minimum, un maximum, et des bornes inférieures et supérieures.

Corrigé

L'étude de la fonction inverse montre que l'ensemble X est égal à $]0,+\infty[$. Donc il n'a ni maximum ni minimum. Il n'a pas de borne supérieure, mais admet 0 comme borne inférieure.

Exercice 8 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \text{ et } g : x \mapsto \frac{\ln(4-x^2)}{x^2-1}.$$

Corrigé

Étude de f. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x \in \mathrm{D}_f \iff x \neq -2 \text{ et } \frac{x-3}{x+2} > 0.$$

On réalise un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe,

$$\mathrm{D}_f =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[.$$

Étude de g. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{D}_g &\iff \begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in]-2, 2[\\ x \notin \{1, -1\} \end{cases} \\ &\iff x \in]-2, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 2[. \end{aligned}$$