

Devoir à rendre le lundi 4 novembre.

Exercice 1 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \text{ et } g : x \mapsto \frac{\ln(4-x^2)}{x^2-1}.$$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou aucun des deux ?

$$x \mapsto \cos(x^3), x \mapsto \sin(x) \tan(x), x \mapsto \sin(x) + 1.$$

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $\sqrt{3} \cos(2x) - \sin(2x) = 2$
2. $\tan(4x + 1) = 1$
3. $\tan(x) = -10$

PROBLÈME : LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES HYPERBOLIQUES

On définit les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) pour tout réel x par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Étudier la parité des fonctions
2. Montrer que $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$
3. Dresser les tableaux de variations des deux fonctions. On prendra soin de noter les limites à l'infini et les valeurs en 0.
4. Tracer sur une même figure l'allure des courbes de ch et sh. On prêtera attention à la tangente en 0.
5. Montrer la formule

$$\forall x \in \mathbf{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

On note que sh réalise une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} et que ch réalise une bijection de \mathbf{R}_+ sur $[1, +\infty[$.

6. On souhaite déterminer l'expression de la bijection réciproque de ch sur $[0, +\infty[$. Pour cela, on fixe $y \geq 1$ et on souhaite résoudre l'équation

$$y = \text{ch}(x) \text{ pour } y \geq 1.$$

- a) En réalisant le changement de variable $X = e^x$, montrer que $X = y + \sqrt{y^2 - 1}$ ou $X = y - \sqrt{y^2 - 1}$.
b) Montrer que pour tout $y \in]1, +\infty[$, $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$.
c) Déterminer la bonne valeur de X .
d) En déduire que l'expression de la fonction réciproque de ch sur $[0, +\infty[$ est

$$y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

7. En résolvant l'équation

$$y = \text{sh}(x) \text{ pour } y \in \mathbf{R}$$

déterminer l'expression de la fonction réciproque de sh sur \mathbf{R} . On s'inspirera de la question précédente.

8. On définit la tangente hyperbolique par

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

Quel est son domaine de définition?

9. En s'inspirant de la fonction tangente, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

10. Montrer que th réalise une bijection strictement croissante sur un sous-ensemble de \mathbf{R} à déterminer. Pour calculer les limites, on pourra utiliser en le démontrant que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \text{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

11. Soit $Y = \text{th}(\mathbf{R})$ l'ensemble des images de la fonction tangente hyperbolique (trouvé à la question précédente). Soit $y \in Y$, en résolvant $y = \text{th}(x)$ dans \mathbf{R} , trouver une expression de la fonction réciproque de th . L'expression utilisée pour le calcul de limite pourra être particulièrement utile.