DM # 3

PROBLÈME : LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES HYPERBOLIQUES

On définit les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) pour tout réel x par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Étudier la parité des fonctions

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

et

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh}(x)$$

Ainsi ch est paire et sh est impaire.

2. Montrer que $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$

Corrigé

Par somme de fonctions dérivables, les fonctions étudiées sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

et

$$\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x).$$

3. Dresser les tableaux de variations des deux fonctions. On prendra soin de noter les limites à l'infini et les valeurs en 0.

Corrigé

On commence par le tableau de variation de sh. On sait que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$. Donc la fonction est strictement croissante. On a $\mathrm{sh}(0) = \frac{e^0-e^0}{2} = 0$. De plus

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. Par imparité, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$. Cela nous donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$		$+$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Passons à l'étude de ch. $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, or d'après le tableau précédent, $\mathrm{sh}(x) > 0 \iff x > 0$. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$		$+$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\mathrm{ch}(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = 1$. Pour le calcul des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$. Par parité, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
Si on a commencé par ch. On raisonne ainsi pour déterminer le signe de ch' :

$$\begin{aligned}
ch'(x) > 0 &\iff \mathrm{sh}(x) > 0 \\
&\iff e^x - e^{-x} > 0 \\
&\iff e^x > e^{-x} \\
&\iff ex > \frac{1}{e^x} \\
&\iff e^{2x} > 0 \\
&\iff 2x > 0 \\
&\iff x > 0.
\end{aligned}$$

4. Tracer sur une même figure l'allure des courbes de ch et sh. On prêtera attention à la tangente en 0.

Montrer la formule

$$\forall x \in \mathbf{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= (\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x))\\ &= \left(\frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}\right)\\ &= e^x e^{-x}\\ &= 1.\end{aligned}$$

On note que sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et que ch réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

On souhaite déterminer l'expression de la bijection réciproque de ch sur $[0,+\infty[$. Pour cela, on fixe $y \geqslant 1$ et on souhaite résoudre l'équation

$$y = \mathrm{ch}(x) \text{ pour } y \geqslant 1.$$

a) En réalisant le changement de variable $X = e^x$, montrer que $X = y + \sqrt{y^2-1})$ ou $X = y - \sqrt{y^2-1})$.

Corrigé

Soit $y \geqslant 1$, on cherche à résoudre $\mathrm{ch}(x) = y$ pour $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} y = \mathrm{ch}(x) &\iff y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\\ &\iff 2y = X + \frac{1}{X}\\ &\iff 2yX = X^2+1\\ &\iff X^2 - 2y + 1 = 0.\end{aligned}$$

C'est une équation du second degré de discriminant $4y^2 - 4 = 4(y^2-1) \geqslant 0$. Ainsi, à part le cas particulier $y = 1$ qui donne $X = 1$ et donc $x = 0$, l'équation admet deux solutions

$$X = y + \sqrt{y^2-1} \text{ ou } X = y - \sqrt{y^2-1}.$$

b) Montrer que pour tout $y \in]1,+\infty[$, $y - \sqrt{y^2-1} < 1$.

Corrigé

Soit $y > 1$, on a

$$\begin{aligned} y - \sqrt{y^2-1} < 1 &\iff y - 1 < \sqrt{y^2-1} \\ &\iff (y-1)^2 < y^2 - 1 \\ &\textbf{par stricte croissante de la fonction carré car } y - 1 > 0 \\ &\iff y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1 \\ &\iff 2y > 2 \\ &\iff y > 1 \text{ qui est vrai.} \end{aligned}$$

c) Déterminer la bonne valeur de X.

Corrigé

Pour $y = 1$, les deux valeurs sont convenables. Pour $y > 1$, comme on sait que $x > 0, \mathrm{X} > 1$, donc la solution $y - \sqrt{y^2-1}$ est impossible donc $\mathrm{X} = y + \sqrt{y^2-1}$.

d) En déduire que l'expression de la fonction réciproque de ch sur $[0,+\infty[$ est

$$y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Corrigé

On obtient $x = \ln(\mathrm{X}) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}.)$

En résolvant l'équation

$$y = \mathrm{sh}(x) \text{ pour } y \in \mathbf{R}$$

déterminer l'expression de la fonction réciproque de sh sur **R**. On s'inspirera de la question précédente.

Corrigé

Soit $y \in \mathbb{R}$, on résout l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ sur $\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{X} = e^x$.

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y &\iff \mathrm{X} - \frac{1}{\mathrm{X}} = 2y \\ &\iff \mathrm{X}^2 - 2y\mathrm{X} - 1 = 0. \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré de discriminant $4y^2 + 4 > 0$. Ainsi il y a deux valeurs possibles pour X, mais on doit choisir la positive car $X = e^x > 0$:

$$X = y + \sqrt{y^2+1} \text{ qui est bien positif car } y + \sqrt{y^2+1} > y + |y| \geqslant 0.$$

L'autre solution possible est

$$X = y - \sqrt{y^2+1} \text{ qui est forcément négative car } y - \sqrt{y^2+1} < y - |y| \leqslant 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) = y &\iff X = y + \sqrt{y^2+1} \\ &\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{aligned}$$

qui est donc l'expression de la bijection réciproque.

On définit la tangente hyperbolique par

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Quel est son domaine de définition ?

Corrigé

Comme pour tout réel x, $\operatorname{ch}(x) \neq 0$, la fonction th est définie sur $\mathbb{R}$.

En s'inspirant de la fonction tangente, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \operatorname{th}(x)^2 = 1 - \frac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2}.$$

Montrer que th réalise une bijection strictement croissante sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ à déterminer. Pour calculer les limites, on pourra utiliser en le démontrant que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \operatorname{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Corrigé

Par quotient, la fonctions th $= \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{sh}'\,\text{ch} - \text{sh}\,\text{ch}'}{\text{ch}^2}(x) = \frac{\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2}{\text{ch}(x)^2} = \frac{1}{\text{ch}(x)^2} > 0.$$

La fonction th est donc strictement croissante et continue donc elle réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et son image que l'on déterminer en calculant ses limites à l'infini. On calcule les limites : th est donc une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$.

Soit $Y = \text{th}(\mathbf{R})$ l'ensemble des images de la fonction tangente hyperbolique (trouvé à la question précédente). Soit $y \in Y$, en résolvant $y = \text{th}(x)$ dans $\mathbf{R}$, trouver une expression de la fonction réciproque de th. L'expression utilisée pour le calcul de limite pourra être particulièrement utile.

Corrigé

Soit $y \in]-1,1[$, on cherche à résoudre l'équation $\text{th}(x) = y$ dans $\mathbb{R}$. On posera $X = e^{2x}$.

$$\begin{aligned}
\text{th}(x) = y &\iff y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\\
&\iff y = \frac{X-1}{X+1}\\
&\iff Xy + y = X - 1\\
&\iff Xy - X = -1 - y\\
&\iff X(y-1) = -1 - y\\
&\iff X = \frac{1+y}{1-y} \text{ car } y \neq 1
\end{aligned}$$

Comme $y \in]-1,1[$, le quotient $\frac{1+y}{1-y}$ est bien strictement positif. Ainsi

$$X = \frac{1+y}{1-y} \iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \iff x = \frac{\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}{2} = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right).$$