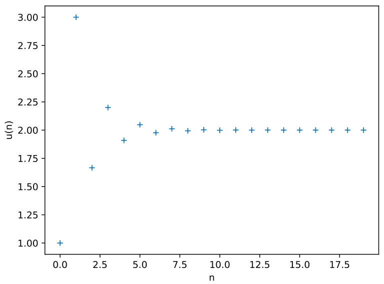
DM # 4

Devoir à rendre le lundi 2 décembre.

Exercice 1 Calculer les limites des expressions suivantes.

1. $\frac{n^3-1}{-n^3+12n^2+10^7n+10^9}$,
2. $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$,
3. $e^n - n^4$,
4. $\frac{4^n+(-2)^n}{4^n-(-2)^n}$,
5. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

Exercice 2 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.



1. Écrire un programme Python qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur u_n.
2. L'affichage des termes de la suite renvoie la formule précédente. Quelles conjectures peut-on faire ?
3. Faire l'étude de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + \frac{2}{x}$.
4. Montrer que (u_n) est bien définie et que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,3].$$
5. Dresser le tableau de signe de la fonction
$$g : x \in [1,3] \mapsto f(f(x)) - x.$$
6. Montrer que la suite extraite (u_{2n}) est croissante puis qu'elle converge.
7. Montrer que la suite (u_{2n+1}) converge.
8. Montrer que nécessairement, les limites de ces suites extraites sont solution de
$$f(f(\ell)) = \ell.$$
9. En déduire que (u_n) converge. Donner sa limite.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 8A$.

2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_n.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D à déterminer.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Donner l'expression explicite de A^n.
7. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = -4u_n + v_n \end{cases}$$

On définit pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = AX_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = A^nX_0$.
8. Donner une expression explicite pour la suite (u_n).

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ (on prend $a \neq 1$). On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si (u_n) converge , montrer que $\ell = \sqrt{a}$.
3. Réaliser l'étude de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{a}$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
6. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{u_n}.$$

8. A partir de cette question, on suppose que $a \geqslant 1$ et avoir choisi u_0 tel que $|u_0 - \sqrt{a}| \leqslant 1$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}.$$

9. Soit $\varepsilon > 0$. Pour obtenir $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon$, quelle valeur de n faut-t-il prendre ?
10. En déduire une fonction Python qui prend en entrée un flottant **epsilon** et renvoie (u_n) et la valeur de n correspondante.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.