DM # 4

Devoir à rendre le lundi 2 décembre.

Exercice 1 Calculer les limites des expressions suivantes.

1. $\frac{n^3-1}{-n^3+12n^2+10^7n+10^9}$,
2. $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$,
3. $e^n - n^4$,
4. $\frac{4^n+(-2)^n}{4^n-(-2)^n}$,
5. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

Exercice 2 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. Écrire un programme Python qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur u_n.
2. L'affichage des termes de la suite renvoie la formule précédente. Quelles conjectures peut-on faire ?
3. Faire l'étude de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + \frac{2}{x}$.
4. Montrer que (u_n) est bien définie et que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,3].$$
5. Dresser le tableau de signe de la fonction
$$g : x \in [1,3] \mapsto f(f(x)) - x.$$
6. Montrer que la suite extraite (u_{2n}) est croissante puis qu'elle converge.
7. Montrer que la suite (u_{2n+1}) converge.
8. Montrer que nécessairement, les limites de ces suites extraites sont solution de
$$f(f(\ell)) = \ell.$$
9. En déduire que (u_n) converge. Donner sa limite.

Corrigé

1.
2. On conjecture que (u_n) converge vers 2.
3. f est dérivable sur son ensemble de définition comme somme de fonctions dérivables et
$$\forall x > 0, f'(x) - \frac{2}{x^2} < 0.$$
L'étude des limites f donne
$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Ainsi f réalise une bijection strictement décroissante de $[0,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$.

4. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,3]$. Cela prouve en particulier que $u_n > 0$ et donc que la suite est bien définie.
   Initialisation. On a bien $u_0 = 1 \in [1,3]$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \in [1,3]$ et on montre que $u_{n+1} \in [1,3]$. Comme f est décroissante, si
   $$1 \leqslant u_n \leqslant 3 \text{ alors}$$
   $$f(3) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(1) \text{ soit}$$
   $$5/3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3.$$
   Donc $u_{n+1} \in [1,3]$.
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc par récurrence on a bien démontré la propriété.
5. Le calcul de $f(f(x)) - x$ donne $\frac{-x^2+x+2}{x+2}$ et l'étude du signe du trinôme donne que cette quantité :
   a) est positive pour $x \in [1,2[$,
   b) est négative pour $x \in]2,3]$,
   c) vaut 0 pour $x = 2$.
6. En calculant les premiers termes
   $$u_0 = 1, u_1 = 1+2/3 = 5/3, u_2 = 1+6/5 = 11/5, u_3 = 1+10/11 = 21/11$$
   on conjecture que (u_{2n}). On prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$.
   L'initialisation est vérifiée avec les calculs de u_0 à u_3 déjà effectués.
   Hérédité. Soit n entier. On suppose que $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$. Comme f est décroissante, cela implique que $f \circ f$ est croissante. Ainsi
   $$f \circ f(u_{n+2}) \geqslant f(u_{2n}$$
   donc
   $$u_{2n+4} \geqslant u_{2n+2}.$$
   Ainsi la suite extraite des termes pairs est croissante. Comme (u_{2n}) est croissante est majorée par 3, on sait qu'elle est convergente.
7. De même on montre par récurrence que pour tout n, $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$.
   (u_{2n+1}) est décroissante et minorée, donc elle converge.
8. Les suites paires et impaires vérifient la relation de récurrence $f(f(x_n)) = x_n$. Donc leur limite ℓ vérifie, en passant à la limite $f(f(\ell)) = \ell$ car f est continue en ℓ.
9. Résolvons l'équation $f(f(\ell)) = \ell$.

$$
\begin{aligned}
f(f(\ell)) = \ell &\iff 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{\ell}} = \ell \\
&\iff 1 + \frac{2}{\frac{\ell+2}{\ell}} = \ell \\
&\iff \ell = 1 + \frac{2\ell}{\ell+2} \\
&\iff \ell^2 + 2\ell = \ell + 2 + 2\ell \\
&\iff \ell^2 + 2\ell = 3\ell + 2 \\
&\iff \ell^2 - \ell - 2 = 0.
\end{aligned}
$$

C'est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 9 > 0$. Ainsi on a deux valeurs de ℓ possibles qui sont

$$\ell_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ et } \ell_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Comme la suite est dans $[1,3]$ la seule limite possible est 2. Ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 2. Comme ces deux suites convergent vers la même limite, on peut conclure que (u_n) converge et que sa limite est 2.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 8A$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_n.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D à déterminer.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Donner l'expression explicite de A^n.
7. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = v_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = -4u_n + v_n \end{cases}$$
On définit pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = AX_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = A^n X_0$.
8. Donner une expression explicite pour la suite (u_n).

Corrigé

1. $A^2 - 8A = 15I_2$.

2. On obtient

$$A\left(\frac{A-8I_2}{15}\right)=I_2$$

donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{A-8I_2}{15}$. Attention, donner la matrice par une autre méthode ici ne donne pas la réponse à la question ...
3. Le déterminant de P vaut $1\neq 0$ donc la matrice est inversible et

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Le calcul donne

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=D.$$

5. On raisonne par récurrence, démonstration classique!
6. On utilise la relation précédente en notant que $D^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}A^n&=PD^nP^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}-3^n+2\times 5^n & -3^n+5^n\\ 2\times 3^n-2\times 5^n & 2\times 3^n-5^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

7. Pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$AX_n=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7u_n+2v_n\\ -4u_n+v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}.$$

Le deuxième point se démontre par récurrence en remarquant que

$$A^{n+1}X_0=A(A^nX_0)=AX_n=X_{n+1}.$$

8. u_n est le premier coefficient de X_n donc du produit

$$A^nX_0=\begin{pmatrix}-3^n+2\times 5^n & -3^n+5^n\\ 2\times 3^n-2\times 5^n & 2\times 3^n-5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$u_n=-2\times 3^n+3\times 5^n.$$

Exercice 4

Soit $a\in\mathbb{R}_+$ (on prend $a\neq 1$). On définit la suite (u_n) par

$$u_0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Si (u_n) converge , montrer que $\ell=\sqrt{a}$.

3. Réaliser l'étude de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{a}$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
6. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{u_n}.$$

8. A partir de cette question, on suppose que $a \geqslant 1$ et avoir choisi u_0 tel que $|u_0 - \sqrt{a}| \leqslant 1$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}.$$

9. Soit $\varepsilon > 0$. Pour obtenir $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon$, quelle valeur de n faut-t-il prendre ?
10. En déduire une fonction Python qui prend en entrée un flottant **epsilon** et renvoie (u_n) et la valeur de n correspondante.

Corrigé

1. Il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On va en fait montrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n > 0$. C'est vrai pour $n = 0$, ce qui initialise la récurrence.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n > 0$, alors

   $$u_{n+1} > \frac{u_n}{2} > 0$$

   ce qui prouve l'hérédité. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et la suite est bien définie.
2. Si u_n converge vers ℓ alors

   $$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell})$$

   donc $\ell^2 = \frac{\ell^2 + a}{2}$ donc $\ell^2 = a^2$, donc $\ell = \sqrt{a}$ ou $\ell = -\sqrt{a}$. Comme la suite est positive on déduit que $\ell = \sqrt{a}$.
3. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée égale

   $$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2x^2} = \frac{x^2 - a^2}{2x^2}$$

   Le tableau de variation de f est donc :
4. Montrons le par récurrence.
   Initialisation : D'après le tableau de variation, f prend $\sqrt{a}$ comme minimum en $\sqrt{a}$. Ainsi $u_1 > \sqrt{a}$.

Hérédité : soit $n\mathbb{N}$, si $u_n > \sqrt{a}$, alors $f(u_n) > \sqrt{a}$ car $\sqrt{a}$ d'après le tableau. Ainsi $u_{n+1} > \sqrt{a}$.
Ainsi par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

5. Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a-u_n^2}{u_n} < 0\right) \text{ car } u_n > \sqrt{a}.$$

Donc la suite est décroissante à partir du rang 1.

6. (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et minorée, donc elle converge. Par la question 2, sa limite est $\sqrt{a}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}$$
$$= \frac{u_n^2}{2u_n} + \frac{a}{2u_n} - \frac{2\sqrt{a}u_n}{2u_n}$$
$$= \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{2u_n}$$
$$= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}.$$

8. Initialisation : pour $n = 0$, la propriété est vraie par hypothèse.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose avoir la propriété. Alors

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2u_n}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 \text{ car } u_n > \sqrt{a} \geqslant 1$$
$$= \frac{1}{2 \times 2^{(2^n-1)2}}$$
$$= \frac{1}{2^{2^{n+1}-2+1}}$$
$$= \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}.$$

Ainsi la propriété est héréditaire. Comme l'initialisation est vraie on déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. On raisonne par analyse synthèse. On sait qu'il suffit d'avoir

$$\frac{1}{2^{2^n-1}} \leqslant \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{2^n-1}} \leqslant \varepsilon &\iff -\ln(2^{2^n-1}) \leqslant \ln(\varepsilon)\\ &\iff -(2^n-1)\ln(2) \leqslant \ln(\varepsilon)\\ &\iff 2^n \geqslant \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1\\ &\iff n\ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1\right)\\ &\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1\right)}{\ln(2)}\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre n égal à la partie entière du nombre trouvé à droite.