DEVOIR MAISON # 5

Révisions DS 3

1. EXERCICES

Exercice 1 Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre $m \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} 3x + y - z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= m \\ x + y + z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - x^{10}}{e^n - x^{20}}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x) + e^x}{e^x + 1}, \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + 2}{x^7 + x^6}.$$

Exercice 3 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Montrer que f réalise une bijection entre D_f et un intervalle à déterminer.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n . Justifier que $x_n \in]0, 1]$.
4. Montrer que (x_n) est une suite décroissante.
5. Montrer que x_n converge vers une limite ℓ vérifiant

$$\ell + \ln(\ell) = 0.$$

Exercice 4 On définit une suite (u_n) par

$$u_n = e^{u_{n-1}} - 1, \quad u_0 \in \mathbf{R}.$$

1. Étudier la fonction $g : x \in \mathbf{R} \mapsto e^x - 1 - x$. Dresser son tableau variations et son tableau de signe.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que si (u_n) converge, alors $\lim u_n = 0$.
4. Dans cette question, $u_0 \leq 0$. Montrer que (u_n) converge.
5. Dans cette question $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$

2. UNE SUITE DE MATRICES

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On définit la matrice P suivante

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T à déterminer.

2. a) Calculer A^2 et A^3 , puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A.$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

b) Justifier que $a_1 = 0, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 0$.

c) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n . On utilisera les valeurs initiales de a_1 et a_2 .

d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n .

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. MATRICES ET SUITES

Soit (u_n) la suite réelle définie par ses premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D à déterminer.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

6. En déduire A^n .

7. En déduire l'expression de u_n . (Indication : comment lire u_n dans X_n ?)