DEVOIR MAISON # 5

Révisions DS 3

1. EXERCICES

Exercice 1 Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre $m \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} 3x+y-z & = 1 \\ x-2y+2z & = m \\ x+y+z & = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - x^{10}}{e^n - x^{20}}, \quad b) \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)+e^x}{e^x+1}, \quad c) \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7+2}{x^7+x^6}.$$

Exercice 3 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

Corrigé

$\mathrm{D}_f =]0, +\infty[$.

2. Montrer que f réalise une bijection entre D_f et un intervalle à déterminer.

Corrigé

f est continue et strictement croissante car c'est la somme de deux fonctions strictement croissantes. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ vers son ensemble image $]-\infty, +\infty[$. En effet

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n. Justifier que $x_n \in]0, 1]$.

Corrigé

Par la question précédente, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f dans $]0, +\infty[$. De plus $f(1) = 1 \geqslant \frac{1}{n}$ donc par stricte croissance de f, $x_n \leqslant 1$.

4. Montrer que (x_n) est une suite décroissante.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n)$ or f est strictement croissante donc $x_{n+1} \leqslant x_n$.

5. Montrer que x_n converge vers une limite ℓ vérifiant

$$\ell + \ln(\ell) = 0.$$

Corrigé

(x_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers $\ell \in \mathbf{R}$. En passant à la limite dans $f(x_n) = \frac{1}{n}$, on obtient, comme f est continue, $f(\ell) = 0$ soit $\ell + \ln(\ell) = 0$.

Exercice 4 On définit une suite (u_n) par

$$u_n = e^{u_n} - 1, \qquad u_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la fonction $g : x \in \mathbf{R} \mapsto e^x - 1 - x$. Dresser son tableau variations et son tableau de signe.

Corrigé

g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = e^x - 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

Cela donne le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

2. Montrer que (u_n) est croissante.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= e^{u_n} - 1 - u_n \\ &= g(u_n) \\ &\geqslant 0 \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

3. Montrer que si (u_n) converge, alors $\lim u_n = 0$.

Corrigé

Soit ℓ la limite finie de (u_n). En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient,

$$\ell = e^{\ell} - 1 \iff g(\ell) = 0$$

donc $\ell = 0$ d'après le tableau de variations de g.

4. Dans cette question, $u_0 \leqslant 0$. Montrer que (u_n) converge.

Corrigé

On montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant 0$ (simple). Ainsi (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

5. Dans cette question $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$

Corrigé

On suppose par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ, alors par croissance de u_n, $\ell \geqslant u_0 > 0$. Donc $\ell > 0$. Or $\ell = 0$ par Q3 ce qui est absurde. Donc (u_n) ne converge pas. Comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

2. UNE SUITE DE MATRICES

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On définit la matrice P suivante

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Montrer que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

   b) Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T à déterminer.
2. a) Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que
$$A^n = a_nA^2 + b_nA.$$
   vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.
3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

   b) Justifier que $a_1 = 0, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 0$.
   c) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n. On utilisera les valeurs initiales de a_1 et a_2.
   d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Corrigé

1. a) On réalise un pivot de Gauss.

b) On obtient

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. a) On calcule :

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

puis

$$\boxed{A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

et enfin :

$$\boxed{4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^3}$$

b) On montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA^2 + b_nA$ ».
Pour $n = 1$, on a $A^1 = A = 0A^2 + 1A$. Donc, en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.
Maintenant, soit $n \in \mathbf{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$:
Par hypothèse de récurrence, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbf{R}^2$ tel que $A^n = a_nA^2 + b_nA$.

D'où

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= AA^n \\
&= A(a_n A^2 + b_n A) \\
&= a_n A^3 + b_n A^2 \\
&= a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2 \quad \text{(question précédente)} \\
&= 4a_n A^2 - 4a_n A + b_n A^2 \\
&= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A \\
&= a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A
\end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$. Ce qui montre la propriété $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$. De plus, comme on l'a vu dans la démonstration, on a les relations $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a, d'après la question précédente (appliquée à $n+1$) : $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1}$. Or, $b_{n+1} = -4a_n$. D'où $\boxed{a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n}$.

b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 4$, soit $(X-2)^2$. Ce polynôme admet une racine double, qui est 2. Donc il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = (\lambda n + \mu)2^n$.
De plus, on sait que $a_1 = 0$ (cf initialisation de la récurrence à la question 2.(b)) et $a_2 = 4a_1 + b_1 = 4 \times 0 + 1 = 1$. Ce qui donne le système $\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 8\lambda + 4\mu = 1 \end{cases}$. On le résout :

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 8\lambda + 4\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -8\mu + 4\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -4\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = \frac{-1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ \mu = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $a_n = \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right)2^n = \frac{1}{4}(n-1)2^n$, ou encore $a_n = (n-1)2^{n-2}$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, on a, d'après la question 2.(b) (appliquée à $n-1$) : $b_n = -4a_{n-1}$. On en déduit, d'après la question précédente : $b_n = -4 \times \frac{1}{4}(n-2)2^{n-1} = -(n-2)2^{n-1}$. De plus, cette expression est encore valable pour $n = 1$ puisque $b_1 = 1$ (cf initialisation de la récurrence à la question 2.(b)) et $-(1-2)2^{1-1} = 1$ également.

$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \text{ on a } b_n = -(n-2)2^{n-1} = (2-n)2^{n-1}.}$

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a, d'après la question 2.(b) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= a_n \mathrm{A}^2 + b_n \mathrm{A} \\
&= a_n \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a_n + b_n & 0 & 0 & 2a_n + b_n \\ 3a_n + b_n & 2a_n + b_n & 2a_n + b_n & a_n \\ 3a_n + b_n & 2a_n + b_n & 2a_n + b_n & a_n \\ 2a_n + b_n & 0 & 0 & 2a_n + b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, d'après les 2 questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
2a_n + b_n &= 2(n-1)2^{n-2} - (n-2)2^{n-1} \\
&= (n-1)2^{n-1} - (n-2)2^{n-1} \\
&= \big((n-1) - (n-2)\big)2^{n-1} \\
&= 2^{n-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
3a_n + b_n &= 3(n-1)2^{n-2} - (n-2)2^{n-1} \\
&= 3(n-1)2^{n-1} - 2(n-2)2^{n-2} \\
&= \big(3(n-1) - 2(n-2)\big)2^{n-2} \\
&= (n+1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\boxed{A^n = 2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

3. MATRICES ET SUITES

Soit (u_n) la suite réelle définie par ses premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Corrigé

Soit $n \in \mathbf{N}$, on calcule AX_n :

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}, AX_n = X_{n+1}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

Corrigé

Démonstration par récurrence.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Corrigé

On obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D à déterminer. On obtient

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Corrigé

Démonstration par récurrence.

6. En déduire A^n.

Corrigé

On a :

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ -3 & 3 & 6\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n+1} & 0 & -2^{n+1}\\ (-1)^n & -3(-1)^n & 2(-1)^n\\ -3 & 3 & 6\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2^{n+3}+(-1)^n-3 & -3(-1)^n+3 & -2^{n+3}+2(-1)^n+6\\ 2^{n+2}+(-1)^{n+1}+3 & 3(-1)^n+3 & -2^{n+2}+2(-1)^{n+1}+6\\ 2^{n+1}+(-1)^n-3 & -3(-1)^n+3 & -2^{n+1}+2(-1)^n+6\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. En déduire l'expression de u_n. (Indication : comment lire u_n dans X_n ?)

Corrigé

$$X_n = A^n X_0$$

donc u_n est la troisième composante de la matrice colonne $A^n X_0$ soit de

$$A^n\begin{pmatrix}u_2\\ u_1\\ u_0\end{pmatrix}$$

soit ...

$$u_n = \frac{1}{6}\left[\left(2^{n+1}+(-1)^n-3\right)u_2+\left(-3(-1)^n+3\right)u_1+\left(-2^{n+1}+2(-1)^n+6\right)u_0\right]$$