DM # 6

Probabilités et variables aléatoires sur un ensemble fini.

Exercice 1 On lance une pièces n fois consécutivement une pièce non équilibrée (qui a une probabilité p de tomber sur Pile). On souhaite calculer la probabilité p_n d'obtenir un nombre pair de pile.

1. Calculer p_1, p_2, p_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$p_{n+1} = (1 - p_n)p + p_n(1 - p).$$
3. En déduire une formule explicite pour la suite (p_n).
4. La suite p_n converge-t-elle ?

Exercice 2 Dans une chambre on a N tiroirs. Avec une probabilité p, on place uniformément une paire de chaussettes dans un des tiroirs choisi uniformément, et avec une probabilité $1 - p$ on n'en place pas.

On a ouvert $N - 1$ tiroirs sans trouver de chaussettes. Quelle est alors la probabilité qu'il y ait la paire de chaussette dans le dernier tiroir ?

Exercice 3 Soient X, Y des variable aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p, q.

1. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Justifier que U et V sont des variables aléatoire de Bernoulli.
2. Déterminer les lois de U et V.

Exercice 4 Un étudiant passe un QCM à N questions. Pour chaque question, il a une probabilité p de connaître la réponse de et chaque question est indépendante. S'il ne sait pas il répond au hasard parmi les 4 réponses. On note X la variable aléatoire qui compte les points obtenus.

1. Quel est la probabilité de répondre juste à la première question ? Pourquoi cette probabilité ne dépend pas de la question choisie ?
2. Expliquer pourquoi X doit suivre une loi Binomiale.
3. Déterminer les paramètres de la loi.
4. Calculer $E(X)$.
5. p représentant la fraction des questions révisées par l'étudiant. Quelle doit être sa valeur pour obtenir un espérance de 10 points. On prendra $N = 20$.