DM # 6

Probabilités et variables aléatoires sur un ensemble fini.

Exercice 1 On lance une pièces n fois consécutivement une pièce non équilibrée (qui a une probabilité p de tomber sur Pile). On souhaite calculer la probabilité p_n d'obtenir un nombre pair de pile.

1. Calculer p_1, p_2, p_3.

Corrigé

p_1 est la probabilité de faire zéro piles, donc

$$p_1 = 1 - p.$$

p_2 est la probabilité de faire 0 ou 2 piles. On obtient

$$p_2 = p^2 + (1-p)^2.$$

p_3 est la probabilité de faire 0 ou 2 piles. Comme le nombre de Piles suit une loi binomiale de paramètres 3 et p on obtient

$$p_3 = \binom{3}{2} p^2(1-p) + (1-p)^3 = 3.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = (1-p_n)p + p_n(1-p).$$

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit la formule des probabilités totales avec le SCE $(A_n, \overline{A_n})$ où A_n est l'événement "obtenir un nombre pair de piles dans les n premiers lancers". Dès lors

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + (1 - P(A_n))P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n(1-p) + (1-p_n)p. \end{aligned}$$

3. En déduire une formule explicite pour la suite (p_n).

Corrigé

(p_n) est une suite arithmético géométrique car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = (1-2p)p_n + p.$$

La recherche d'un point fixe donne

$$\ell = (1-2p)\ell + p$$

qui donne $\ell = 2$. La suite $v_n = p_n - \ell$ vérifie

$$v_{n+1} = (1-2p)v_n$$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = (1-2p)^{n-1}(p_1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - p)(1-2p)^{n-1}.$$

On obtient

$$p_n = (\frac{1}{2} - p)(1-2p)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

4. La suite p_n converge-t-elle ?

Corrigé

Si $p \in]0,1[$, $(1-2p) \in]-1,1[$ donc la suite tend vers $\frac{1}{2}$.
Si $p = 0$ la suite est constante égale à 1 (on fait toujours 0 piles). Si $p = 1$ on alterne entre 0 et 1 car on ne fait que des piles.

Exercice 2 Dans une chambre on a N tiroirs. Avec une probabilité p, on place uniformément une paire de chaussettes dans un des tiroirs choisi uniformément, et avec une probabilité $1-p$ on n'en place pas.

On a ouvert $\mathrm{N}-1$ tiroirs sans trouver de chaussettes. Quelle est alors la probabilité qu'il y ait la paire de chaussette dans le dernier tiroir ?

Corrigé

On note A l'événement "une chaussette a été placée" (de probabilité p) et B_n l'événement "il n'y a pas de chaussettes dans les $n-1$" premiers tiroirs.
Le problème se ramène à calculer $\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A})$. La formule de Bayes donne

$$P_{B_n}(A) = \frac{P(A)P_A(B_n)}{P(A)P_A(B_n) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B_n)} \tag{0.1}$$
$$= \frac{pP_A(B_n)}{pP_A(B_n) + (1-p)P_{\overline{A}}(B_n)} \tag{0.2}$$

Or :

- $P_A(B_n)$ est la probabilité qu'il n'y ait pas de chaussette dans les $n-1$ premiers tiroirs, sachant qu'il y en a dans un des tiroirs, c'est donc la probabilités qu'elle soit dans le dernier, donc $\frac{1}{n}$.
- $P_{\overline{A})(B_n)}$ est la probabilité qu'il n'y ait pas de chaussettes dans les premiers tiroirs, sachant qu'on n'a rangé aucune chaussette, c'est donc 1.

Ainsi

$$P_{B_n}(A) = \frac{p/n}{p/n + (1-p)} = \frac{p}{p + n(1-p)}.$$

Exercice 3 Soient X, Y des variable aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p, q.

1. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Justifier que U et V sont des variables aléatoire de Bernoulli.

Corrigé

U et V prennent comme valeurs 0 ou 1 donc suivent des lois de Bernoulli.

2. Déterminer les lois de U et V.

Corrigé

Il suffit de calculer les paramètres des lois associées, c'est à dire

$$\begin{aligned} P(U = 1) &= P([X = 1] \cup [Y = 1]) \\ &= P(X = 1) + P(Y = 1) - P([X = 1] \cap [Y = 1]) \\ &= p + q - pq \text{ par indépendance.} \end{aligned}$$

De même $P(V = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) = P(X = 1)P(Y = 1) = pq$.
Ainsi $U \hookrightarrow \mathcal{B}(p + q - pq)$ et $V \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$.

Exercice 4 Un étudiant passe un QCM à N questions. Pour chaque question, il a une probabilité p de connaître la réponse de et chaque question est indépendante. S'il ne sait pas il répond au hasard parmi les 4 réponses. On note X la variable aléatoire qui compte les points obtenus.

1. Quel est la probabilité de répondre juste à la première question ? Pourquoi cette probabilité ne dépend pas de la question choisie ?
2. Expliquer pourquoi X doit suivre une loi Binomiale.
3. Déterminer les paramètres de la loi.
4. Calculer E(X).
5. p représentant la fraction des questions révisées par l'étudiant. Quelle doit être sa valeur pour obtenir un espérance de 10 points. On prendra $N = 20$.

Corrigé

1. On appelle A_k l'événement "tomber sur une question révisée" à la question k et X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si on a juste à la question k et 0 sinon.
   Alors
   $$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(A)P_A(X_1 = 1) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(X_1 = 1) \\ &= pP_A(X_1 = 1) + (1-p)P_{\overline{A}}(X_1 = 1) \\ &= p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{4} \\ &\text{car } P_A(X_1 = 1) = 1 \text{ et } P_{\overline{A}}(X_1 = 1) = \frac{1}{4} \\ &= \frac{3p+1}{4}. \end{aligned}$$
   Cette probabilité ne dépend pas de la question choisie car celles-ci sont indépendantes.
2. X compte le nombre de succès d'une succession d'épreuve de Bernoulli indépendantes de même paramètre. X suit donc une loi binomiale.
3. La probabilité de succès de chaque épreuve de Bernoulli est $\frac{3p+1}{4}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{3p+1}{4}$.
4. $E(X) = n\frac{3p+1}{4}$.
5. On résout l'équation $10 = \frac{20(3p+1)}{4}$ pour trouver $p = \frac{1}{3}$. Il faut donc réviser un tiers des questions pour avoir une espérance de points de 10.