DEVOIR MAISON # 7

Dans tout le problème, n un entier naturel non nul fixé.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus.

- Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
- Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
- En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.
- La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
- On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (positif s'il gagne de l'argent, négatif s'il en perd).
- On notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur", et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

1. PARTIE I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\quad P(A) = \frac{13}{27}$.
2. Montrer que : $\quad G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

2. PARTIE II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$. Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant "À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants !", et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $\qquad Y = (-1)^X$.

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
   b) Démontrer que : $\quad E(Y) = 2P(A) - 1$.

2. a) Donner la loi de X.
   b) En déduire que l'on a également :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

   puis que : $\quad E(Y) = (1-2p)^n$.
3. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.
4. Démontrer que

$$P(A) \geqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU ''} n \text{ est pair''}\right]$$

3. PARTIE III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leqslant 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que :

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k).$$

2. Démontrer que : $\quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
3. Montrer que : $\quad E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$
4. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow p \leq \frac{1}{2}$$

5. a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

4. PARTIE IV

Dans cette partie on pourra avoir besoin de l'inégalité de Bienaymé-Tchébytchev.

Théorème 1 | Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Si X est une variable aléatoire finie alors pour tout $\alpha > 0$,

$$P(|X - E(X)| > \alpha) \leqslant \frac{V(X)}{\alpha^2}.$$

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10 pour cents, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ième joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.
2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
   Démontrer alors que $E(J) = 500$ et $V(J) = 11250$.
3. Justifier que :
$$P(J \leqslant 100) \leqslant P(|J - 500| \geqslant 400).$$
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, montrer que :
$$P(J \leqslant 100) \leqslant \frac{9}{128}$$
.
5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?