DEVOIR MAISON 7 BIS

Le but de ce problème est de démontrer le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les fonctions polynomiales.

Théorème 1 | Théorème de Weierstrass

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On peut trouver une suite de polynômes P_n tels que

$$\lim_{n} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| = 0.$$

Pour simplifier la démonstration on supposera :

- que $[a,b] = [0,1]$ (ceci simplifie légèrement les calculs mais n'est pas fondamentalement utile)
- que f est de classe C^1 sur $[a,b]$ (cela rendra la démonstration plus abordable).

A. INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

Dans cette partie, X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies.

1. Montrer que l'application

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto E[(X+tY)^2]$$

   est un polynôme du second degré.
2. Justifier que le discriminant du polynôme est négatif. En déduire **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$E[XY] \leqslant \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}.$$

Dans la suite du problème, n est un entier naturel non nul.

B. UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$.

1. On définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Quelle est la loi suivie par S_n, sa variance et son espérance?
2. En déduire la loi de $\frac{S_n}{n}$. Quelle est sa variance et son espérance?
3. On définit la fonction

$$P_n : x \in [0,1] \mapsto E[f\left(\frac{S_n}{n}\right)].$$

   Montrer que P_n est définie par

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

4. Justifier que $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$.
5. Après avoir justifié que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x)x^k(1-x)^{n-k}$, montrer que

$$\forall x \in [0,1] |f(x) - P_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|.$$

6. Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - P_n(x)| \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = ME\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right].$$

   (*C'est ici qu'on doit utiliser que* $f \in C^1([0,1])$.)

C. FIN DE LA DÉMONSTRATION.

1. En déduire que

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - P_n(x)| \leqslant M\sqrt{E\left[|\frac{S_n}{n} - x|^2\right]} = \sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}.$$

2. En déduire que

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{Mx(1-x)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{M}{4\sqrt{n}}.$$

3. Conclure la démonstration du théorème.