

DEVOIR MAISON # 8

Intégration

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes et elles sont non nulles à partir d'un certain rang et si

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors $u_n \sim v_n$.

1. INTÉGRALES DE WALLIS

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

1. À l'aide d'un changement de variables, montrer que

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

2. Calculer W_0 et W_1 .

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

(On réalisera une intégration par parties).

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

5. En déduire que

$$W_{n+1} \sim W_n \text{ puis que } W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

7. Trouver une formule analogue pour W_{2n+1} .

8. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de W_n .

2. JPP DES IPP

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit une suite (I_n) de terme général

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!} dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \int_0^1 \frac{e^x}{n!} dx$. En déduire que I_n converge vers 0.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = I_0 - I_n.$$

5. Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ converge et déterminer sa limite.}$$

3. POLYNÔMES ET MATRICES

Soit M la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit P le polynôme

$$P(x) = x^2 - 4x + 4.$$

Montrer que $P(M) = 0$.

2. Soit $n \geq 2$. Justifier qu'il existe un polynôme Q_n et des réels (λ_n, μ_n) tels que

$$x^n = Q_n(x)P(x) + \lambda_n x + \mu_n.$$

3. Vérifier que $P(2) = P'(2) = 0$.
4. En déduire la valeurs des réels λ_n et μ_n .
5. Prouver que $M^n = \lambda_n A + \mu_n I_2$ puis en déduire une formule pour M^n .