

DEVOIR MAISON # 9

A. EXERCICES

Exercice 1 Dans chacun des cas, donner un équivalent de u_n .

1. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$
2. $u_n = \frac{1 - e^{\frac{1}{n^2}}}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
3. $u_n = \left(1 + \frac{4}{n\sqrt{n}}\right)^5 - 1$.

Exercice 2 Après avoir prouvé sa convergence, calculer la somme (on se ramènera à une somme usuelle)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

Exercice 3 Montrer que l'ensemble des suites

$$E = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ la série } \sum_{k=0}^n |u_k| \text{ converge} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 On note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. D'après le cours, quelle est la limite de H_n ?
On souhaite démontrer ce résultat.
2. Montrer que H_n est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
4. Démontrer le résultat énoncé question 1).

Exercice 5 Déterminer une base de

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 0. \end{cases} \right\}.$$

Quelle est la dimension de E?

B. MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tM = M$ et antisymétrique si ${}^tM = -M$. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que S_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. On admet que A_n en est aussi un.

2. **Dans cette question, $n = 3$.** On note $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ un élément de $M_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que

$$M \in S_3 \iff \begin{cases} b &= d \\ c &= g \\ f &= h \end{cases}.$$

b) En déduire une base de S_3 et donner sa dimension. On note cette base (M_1, \dots, M_d) .

c) Montrer que

$$M \in A_3 \iff \begin{cases} b &= -d \\ c &= -g \\ f &= -h \\ a = e = i &= 0 \end{cases}.$$

d) En déduire une base de A_3 et donner sa dimension. On note cette base $(N_1, \dots, N_{d'})$.

e) Montrer que $(M_1, \dots, M_d, N_1, \dots, N_{d'})$ est une base de $M_3(\mathbb{R})$.

3. a) Montrer que

$$M \in S_n \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } a_{i,j} = a_{j,i}.$$

- b) En déduire une base de S_n . Montrer que $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On note cette base (M_1, \dots, M_d) .
- c) De la même façon, déterminer une base de A_n et montrer que $\dim S_n = \frac{n(n-1)}{2}$. On note cette base $(N_1, \dots, N_{d'})$.
- d) Montrer que $(M_1, \dots, M_d, N_1, \dots, N_{d'})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

C. POLYNÔMES INTERPOLATEURS DE LAGRANGE

Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels **distincts** et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on définit la fonction L_k par

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - a_i}{a_k - a_i}.$$

1. **Dans cette question uniquement**, on pose $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Déterminer L_0, L_1 et L_2 .
2. Justifier pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $L_k \in \mathbb{R}_n[x]$ et que $\deg L_k = n$.
3. Montrer que pour tout $(k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$,

$$L_k(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$.
5. Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
6. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k(x).$$

7. Soient $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) = b_i$ et donner son expression.
8. Dans cette question, on fixe $r \in \mathbb{R}$ et on suppose que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$a_i = i \text{ et } b_i = r^i.$$

Montrer que $P(x) = \sum_{i=0}^n r^i L_i(x)$. Calculer $P(n+1)$.