DEVOIR SURVEILLÉ # 1

Date : 25 septembre 2022

Durée : 4h

Quelques consignes :

- Accordez un grand soin à la présentation et à la rédaction des résultats. Cela, comme aux concours, sera largement pris en compte dans l'évaluation de la copie. Utilisez le brouillon !
- Traitez les questions dans l'ordre. Encadrez les résultats. Laissez une marge suffisante pour les points et commentaires. Revenir sur une nouvelle page au début de chaque exercice. Numérotez les pages (en indiquant bien le nombre total de pages).
- Il est possible de sauter une question en l'indiquant clairement sur la copie.
- Il est vain d'essayer d'arnaquer le correcteur : cela serait sévèrement sanctionné.
- Les devoirs en prépa et les sujets de concours sont longs. Avancez à votre rythme en utilisant tout le temps qui vous est proposé.
- Les calculatrices et documents sont interdits.

Exercice 1 Factoriser le polynôme

$$\mathrm{P}(x) = x^3 - 7x - 6.$$

Exercice 2 Déterminer l'expression explicite puis la limite éventuelle de la suite définie par

$$u_0 = -10 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 12.$$

Exercice 3 Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Résoudre l'équation

$$(\lambda - 1)x^2 = 2x + 1.$$

On raisonnera par disjonction de cas sur λ.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbf{N}$, montrer que

$$n \text{ est pair} \iff n^2 + 2n + 3 \text{ est impair}.$$

Exercice 5 Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbf{R}$:

$$e^{6x} - 6e^{3x} + 5 \leqslant 0.$$

Exercice 6 Pour chacune des affirmations suivantes : donner leur négation, puis démontrer si l'affirmation est vraie ou fausse.

1. $\forall A \in]0, +\infty[, \exists x \in \mathbf{R}, \ln(x) > A,$
2. $\exists n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, m \geqslant n,$
3. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, y = e^x.$

Exercice 7 Déterminer un réel $a \in \mathbf{R}$ tel que l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln(2x+4)$ est $]a, +\infty[$. Démontrer que :

$$\forall y \in \mathbf{R}, \exists! x \in]a, +\infty[, y = \ln(2x+4).$$

Exercice 8 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$.

1. Calculer les cinq premiers termes.
2. Conjecturer une formule pour u_n et la démontrer par récurrence.

Exercice 9 On définit une suite (F_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Exercice 10 Résoudre l'inéquation suivante :

$$|2x+2| + |1-2x| > 3.$$

PROBLÈME

Théorème 1

1. Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.
2. Soit une suite (u_n) convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$. Alors si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

1. On définit une suite par $p_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}, p_{n+1} = qp_n$ (pour une constante $q \in \mathbf{R}_+$ fixée). A quelle condition sur q la suite converge-t-elle vers zéro ?
2. Soit $\mathrm{S} \in]0, +\infty[$ un réel fixé.
   a) On définit une fonction f sur $\mathbf{R}_+$ par
   $$\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) = x + \frac{x}{2}\left(\frac{\mathrm{S}-x}{\mathrm{S}}\right).$$
   Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}_+$.
   b) On définit dans le reste de cette partie la suite (u_n) par $u_0 \in]0, \mathrm{S}[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}, u_n \in]0, \mathrm{S}[$.
   c) Montrer que (u_n) est croissante.
   d) Montrer que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$ et que $\ell(\mathrm{S}-\ell) = 0$.
   e) En déduire la valeur de ℓ.
3. Soient A, S des nombres réels tels que $0 < \mathrm{A} < \mathrm{S}$.
   a) Soit g une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par
   $$\forall x \in \mathbf{R}_+, g(x) = x + \frac{x}{2}\left(\frac{\mathrm{S}-x}{\mathrm{S}}\right)\left(\frac{x-\mathrm{A}}{\mathrm{S}}\right).$$
   On admet que g est strictement croissante de $[0, \mathrm{S}]$ vers $[0, \mathrm{S}]$.
   b) Étudier le signe $g(x) - x$ sur $[0, \mathrm{S}]$.
   c) On définit dans presque tout le reste de cette partie la suite (v_n) par $v_0 \in]\mathrm{A}, \mathrm{S}[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = g(v_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, v_n \in]\mathrm{A}, \mathrm{S}[$.
   d) Montrer que (v_n) est croissante.
   e) En déduire que (v_n) converge vers une limite ℓ et que cette limite vérifie l'équation $\ell(\mathrm{S}-\ell)(\ell-\mathrm{A}) = 0$.
   f) Déterminer ℓ.
   g) **Dans cette question uniquement**, on suppose que $v_0 \in]0, \mathrm{A}[$. En reprenant le schéma de démonstration précédent, montrer que (v_n) est décroissante et minorée par 0. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
   h) **Dans cette question uniquement**, on suppose que $v_0 \in \{\mathrm{A}, \mathrm{S}\}$. Montrer que (v_n) est constante.
   i) **Question bilan.** Représenter dans un tableau, la limite de (v_n) en fonction de la valeur de v_0 que l'on suppose dans $]0, \mathrm{S}]$.