DEVOIR SURVEILLÉ # 1

Date : 25 septembre 2024

Exercice 1 Factoriser le polynôme

$$P(x) = x^3 - 7x - 6.$$

Solution

-1 est une racine évidente du polynôme donc on peut le factoriser par $(x+1)$.
On cherche des réels a, b, c, tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(x+1)(ax^2 + bx + c) = x^3 - 7x - 6.$$

Après développement et identification des coefficients on obtient

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a + b & = 0 \\ b + c & = -7 \\ c & = -6 \end{cases}$$

soit $a = 1, b = -1, c = -6$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = (x+1)(x^2 - x - 6).$$

On obtient un trinôme de discriminant $1 + 4 \times 6 = 25 > 0$. $x^2 - x - 6$ a donc deux racines, qu'on calcule -2 et 3. Ainsi

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x-3).$$

Exercice 2 Déterminer l'expression explicite puis la limite éventuelle de la suite définie par

$$u_0 = -10 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 12.$$

Solution

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On cherche un point fixe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = \frac{\ell}{3} + 12$ soit $\ell = 18$.
On définit une suite (v_n) par $v_n = u_n - 18$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 18 \\ &= \frac{u_n}{3} + 12 - 18 \\ &= \frac{u_n}{3} - 6 \\ &= \frac{u_n - 18}{3} \\ &= \frac{v_n}{3}. \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc pour tout n

$$v_n = \frac{v_0}{3^n} = \frac{-28}{3^n}.$$

Ainsi pour tout n,

$$u_n = \frac{-28}{3^n} + 18.$$

Exercice 3 Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Résoudre l'équation

$$(\lambda - 1)x^2 = 2x + 1.$$

On raisonnera par disjonction de cas sur λ.

Solution

On raisonne par disjonction de cas. On traite d'abord le cas $\lambda = 1$. Dans ce cas là, l'équation devient $2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$.
Ensuite, si $\lambda \neq 1$, l'équation devient

$$(\lambda - 1)x^2 - 2x - 1 = 0$$

qui est une équation du second degré de discriminant

$$\Delta = 4 - 4(\lambda - 1) = 4\lambda.$$

Trois sous-cas apparaissent alors :

- $\lambda < 0$: aucune solution

- $\lambda = 0$: une solution $x = \frac{-2}{-1\times 2} = -1$
- $\lambda > 0$ (mais différent de 1 : deux solutions

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{4\lambda}}{2(\lambda-1)} = \frac{1+\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}.$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbf{N}$, montrer que

$$n \text{ est pair } \iff n^2+2n+3 \text{ est impair.}$$

Solution

On raisonne par double implication.
Implication directe : Si n est pair, il existe k entier tel que $n = 2k$, alors

$$n^2+2n+3 = 4k^2+4k+3 = 2(2k^2+2k+1)+1$$

qui est impair.
Implication réciproque : On raisonne par contraposée, on montre que si n est impair alors n^2+2n+3 est pair. S'il existe k tel que $n = 2k+1$ alors de la même façon

$$n^2+2n+3 = 4k^2+4k+1+4k+2+3 = 4k^2+8k+6$$

qui est bien un entier pair.

Exercice 5 Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbf{R}$:

$$e^{6x} - 6e^{3x} + 5 \leqslant 0.$$

Solution

On pose $X = e^{3x}$. L'équation devient l'inéquation de degré 2 : $X^2 - 6X + 5 \leqslant 0$. On reconnait un trinôme de degré 2 qui se factorise en $(X-5)(X-1)$/ Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{6x} - 6e^{3x} + 5 \leqslant 0 &\iff (X-5)(X-1) \leqslant 0 \\ &\iff 1 \leqslant X \leqslant 5 \\ &\iff 1 \leqslant e^{3x} \leqslant 5 \\ &\iff \ln(1) \leqslant 3x \leqslant \ln(5) \\ &\iff 0 \leqslant x \leqslant \frac{\ln(5)}{3}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $[0, \frac{\ln(5)}{5}]$.

Exercice 6 Pour chacune des affirmations suivantes : donner leur négation, puis démontrer si l'affirmation est vraie ou fausse.

1. $\forall A \in]0, +\infty[, \exists x \in \mathbf{R}, \ln(x) > A$,
2. $\exists n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, m \geqslant n$,
3. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, y = e^x$.

Solution

1. La négation est
$$\exists A \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbf{R}, \ln(x) \leqslant A.$$
Montrons que la proposition est vraie : Soit $A \in]0, +\infty[$. On cherche $x \in \mathbf{R}, \ln(x) \leqslant A$. Il suffit de prendre $x = e^A$ car $\ln(e^A) = A$.
2. La négation est
$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, m < n.$$
La proposition est vraie : il suffit de trouver un $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $m \in \mathrm{N}, m \geqslant n$. $n = 0$ convient.
3. La négation est
$$\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, y \neq e^x.$$
La proposition est fausse. Il suffit de trouver un $y \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}, y \neq e^x$. $y = 0$ convient car pour tout x, $e^x > 0$.

Exercice 7 Déterminer un réel $a \in \mathbf{R}$ tel que l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln(2x+4)$ est $]a, +\infty[$. Démontrer que :
$$\forall y \in \mathbf{R}, \exists! x \in]a, +\infty[, y = \ln(2x+4).$$

Solution

La fonction est définie en x si et seulement $2x+4 > 0 \iff x > -2$. On pose $a = -2$. Soit $y \in \mathbf{R}$, cherchons $x \in]-2, +\infty[$ tel que $y = \ln(2x+4)$. On raisonne par analyse synthèse :

$$\begin{aligned} y = \ln(2x+4) &\iff e^y = 2x+4 \\ &\iff e^y - 4 = 2x \\ &\iff x = \frac{e^y-4}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi si x existe il est unique.
Synthèse : Comme on a raisonné par équivalence, x vérifie bien l'équation voulue et on a bien $x = \frac{e^y-4}{2} > -2$. La propriété est donc démontrée.

Exercice 8 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n^2}$.

1. Calculer les cinq premiers termes.
2. Conjecturer une formule pour u_n et la démontrer par récurrence.

Solution

1. $u_1 = \sqrt{3}, u_2 = \sqrt{5}, u_3 = \sqrt{7}, u_4 = \sqrt{9}$.
2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sqrt{2n+1}$.
   Initialisation. La propriété est vraie au rang 0 car $u_0 = 1 = \sqrt{2\times 0+1}$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = \sqrt{2n+1}$, montrons que $u_{n+1} = \sqrt{2(n+1)+1} = \sqrt{2n+3}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{2+u_n^2} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2n+1}^2} \\ &= \sqrt{2+2n+1} \\ &= \sqrt{2n+3} \end{aligned}$$

   d'où l'hérédité.
   Par principe de récurrence la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 9 On définit une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Solution

On raisonne par récurrence double.

Initialisation double. La propriété est vraie au rang 0 car

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = u_0$$

et au rang 1

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = u_1.$$

Hérédité double. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$. Montrons qu'elle est vraie au rang suivant :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Or

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et de même

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+2$. Par principe de récurrence double, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 10 Résoudre l'inéquation suivante :

$$|2x+2|+|1-2x|>3.$$

Solution

On a :
- $2x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$
- $1-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{1}{2}$.

On doit traiter trois cas :
Cas 1, $x \in]-\infty,-1]$. L'équation devient :

$$\begin{aligned}
-2x-2+1-2x>3 &\iff -4x>4 \\
&\iff x<-1.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $]-\infty,-1] \cap]-\infty,-1[=]-\infty,-1[$.
Cas 2, $x \in]-1,\frac{1}{2}]$. L'équation devient :

$$2x+2+1-2x>3 \iff 3>3$$

Il n'y a aucune solution sur cet ensemble.
Cas 3, $x \in]\frac{1}{2},,+\infty[$. L'équation devient :

$$\begin{aligned}
2x+2+2x-1>3 &\iff 4x>2 \\
&\iff x>\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est $]\frac{1}{2},+\infty[$.
Bilan. L'ensemble des solutions est

$$]-\infty,-1[\cap]\frac{1}{2},,+\infty[.$$

PROBLÈME

Théorème 1

1. Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.
2. Soit une suite (u_n) convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$. Alors si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

1. On définit une suite par $p_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p_{n+1} = qp_n$ (pour une constante $q \in \mathbf{R}_+$ fixée). A quelle condition sur q la suite converge-t-elle vers zéro ?

Solution

On reconnaît une suite géométrique de raison q. Elle converge vers 0 si et seulement si $q \in]0,1[$.

2. Soit $\mathrm{S} \in]0,+\infty[$ un réel fixé.
   a) On définit une fonction f sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) = x + \frac{x}{2}\left(\frac{\mathrm{S}-x}{\mathrm{S}}\right).$$

Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}_+$.

Solution

f est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f'(x) = 1 + \frac{(\mathrm{S}-x)}{2\mathrm{S}} - \frac{x}{2\mathrm{S}} = \frac{3\mathrm{S}-2x}{2\mathrm{S}}.$$

On obtient alors le tableau de variation et de signe suivant :

x	0		$\frac{3\mathrm{S}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{9\mathrm{S}}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

   b) On définit dans le reste de cette partie la suite (u_n) par $u_0 \in]0,\mathrm{S}[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]0,\mathrm{S}[$.

Solution

Initialisation. $u_0 \in]0, S[$ d'après l'énoncé.
Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $0 < u_n < S$. Comme f est strictement croissante sur $]0, S[$ on a

$$f(0) < f(u_n) < f(S)$$

soit

$$0 < u_{n+1} < S$$

d'où l'hérédité.

c) Montrer que (u_n) est croissante.

Solution

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{u_n(S - u_n)}{2S}$$

qui est positif car $u_n \in]0, S[$ par la question précédente. Ainsi (u_n) est croissante.

d) Montrer que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$ et que $\ell(S - \ell) = 0$.

Solution

La suite est croissante et majorée par S donc elle converge vers une limite ℓ. De plus $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$ donc en passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \ell + \frac{\ell(S - \ell)}{2S} = \ell \\ &\iff \frac{\ell(S - \ell)}{2S} = 0 \\ &\iff \ell(S - \ell) = 0. \end{aligned}$$

e) En déduire la valeur de ℓ.

Solution

On obtient $\ell = 0$ ou $\ell = S$. Or $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante donc le cas $\ell = 0$ est exclu. Ainsi $\ell = S$.

3. Soient A, S des nombres réels tels que $0 < A < S$.

a) Soit g une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, g(x) = x + \frac{x}{2}\left(\frac{\mathrm{S}-x}{\mathrm{S}}\right)\left(\frac{x-\mathrm{A}}{\mathrm{S}}\right).$$

On admet que g est strictement croissante de $[0, \mathrm{S}]$ vers $[0, \mathrm{S}]$.

b) Étudier le signe $g(x) - x$ sur $[0, \mathrm{S}]$.

Solution

On a

$$g(x) = \frac{x(\mathrm{S}-x)(x-\mathrm{A})}{2}$$

et donc

$$g(x) - x = \frac{x(\mathrm{S}-x)(x-\mathrm{A})}{2}.$$

Le signe de $g(x) - x$ est donc :
- strictement positif si $x \in]\mathrm{A}, \mathrm{S}[$,
- strictement négatif si $x \in]0, \mathrm{A}[$,
- nul si $x \in \{0, \mathrm{A}, \mathrm{S}\}$.

c) On définit dans presque tout le reste de cette partie la suite (v_n) par $v_0 \in]\mathrm{A}, \mathrm{S}[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \in]\mathrm{A}, \mathrm{S}[$.

Solution

On raisonne par récurrence (exactement comme en Q 2.b. **Initialisation.** $u_0 \in]0, \mathrm{S}[$ d'après l'énoncé.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $0 < u_n < \mathrm{S}$. Comme f est strictement croissante sur $]\mathrm{A}, \mathrm{S}[$ on a

$$f(\mathrm{A}) < f(u_n) < f(\mathrm{S})$$

soit

$$\mathrm{A} < u_{n+1} < \mathrm{S}$$

d'où l'hérédité (car on calcule $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et $f(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$.

d) Montrer que (v_n) est croissante.

Solution

Soit $n \in \mathbf{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = g(v_n) - v_n > 0$ d'après Q 3.b. car $v_n \in]A, S[$. La suite est donc croissante.

e) En déduire que (v_n) converge vers une limite ℓ et que cette limite vérifie l'équation $\ell(S-\ell)(\ell - A) = 0$.

Solution

(v_n) est croissante et majorée par S donc elle converge vers une limite finie ℓ.
En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient $\ell = f(\ell)$ donc

$$\ell = \ell + \frac{\ell(S-\ell)(A-\ell)}{2S^2}$$

donc

$$\ell(S-\ell)(A-\ell) = 0.$$

f) Déterminer ℓ.

Solution

On obtient $\ell = 0$ ou $\ell = S$ ou $\ell = A$. Or $v_0 > A > 0$ et (v_n) est croissante donc la seule limite possible est S.

g) **Dans cette question uniquement**, on suppose que $v_0 \in]0, A[$. En reprenant le schéma de démonstration précédent, montrer que (v_n) est décroissante et minorée par 0. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

Solution

h) **Dans cette question uniquement**, on suppose que $v_0 \in \{A, S\}$. Montrer que (v_n) est constante.

i) **Question bilan.** Représenter dans un tableau, la limite de (v_n) en fonction de la valeur de v_0 que l'on suppose dans $]0, S]$.