DEVOIR SURVEILLÉ # 2

Date : 13 novembre 2024

Durée : 4h

On rappelle les formules de trigonométrie suivantes : pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
&\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\\
&\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1\\
&\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).
\end{aligned}$$

SOMMES

Calculer le sommes suivantes :

1. $$\sum_{i=0}^{n} (i+2)^2.$$
2. $$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{2^{2j}}.$$
3. $$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$
4. $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}.$$
5. $$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{k+1}.$$

EXERCICES

Exercice 1 On définit la fonction f par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{1-x}\right).$$

1. Prouver que $\mathrm{D}_f =]1,2[$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que f est injective.
4. Montrer que f (considérée comme une fonction de D_f dans $\mathbf{R}$) est surjective.
5. Donner l'expression de la bijection réciproque de f.

Exercice 2 On définit la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad u_1 = -5 \quad u_2 = 13 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par : $\forall n \in \mathbf{N} \quad v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.
2. Déterminer l'expression de v_n.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$.
4. Déterminer l'expression de la suite (u_n).

Exercice 3 Soient $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. On souhaite étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. On le notera D_f.
2. Montrer que f réalise une bijection entre D_f et $\mathbf{R}\backslash\{\alpha\}$ où α est un réel à déterminer.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbf{N}$, pour tout $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on définit

$$\mathrm{S}_m = \sum_{k=0}^{n} k^m.$$

1. Sans démonstration, donner les valeurs de $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$.
2. Pour tout $k \in \{0, \dots 5\}$, donner les valeurs de $\binom{5}{k}$.
3. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, développer explicitement $(k+1)^5$.
4. Exprimer $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5$ en fonction de $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \mathrm{S}_4$.
5. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5$ d'une autre façon.
6. En déduire la valeur de S_4.

Exercice 5 Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer la somme

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k x^k.$$

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

1. Montrer que $xf'(x) = \mathrm{S}_n(x)$.
2. Calculer la somme $f(x)$ puis en déduire une autre valeur pour $f'(x)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{S}_n(x)$.

Exercice 6

1. **Question de cours.** Donner, sans démonstration, le tableau de variation de la fonction Arctangente, limites comprises.
2. Montrer que pour tout x, y tels que $\tan(x), \tan(y)$ et $\tan(x+y)$ existent, on a :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}.$$

   En déduire que

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}.$$

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\tan(\arctan(1+x)-\arctan(x)) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right).$$

   En déduire qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\arctan(1+x)-\arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)+k\pi.$$

4. Montrer que

$$-\pi < \arctan(1+x)-\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) < \pi$$

5. En déduire que que $\arctan(1+x)-\arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.
6. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Exercice 7

Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x,y) = (x+y, x-2y).$$

Montrer que f est bijective.

PROBLÈME : UN COUPLE DE SUITES

Dans tout le problème, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est un réel fixé.

1. On définit une suite (u_n) par

$$u_0 \cos(x) \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

   a) (*) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{\sin(x)\cos(x)}{2^n \sin(\frac{x}{2^n})}$. (*Indication : pour l'hérédité, on pourra commencer par calculer* $\sin(\frac{x}{2^{n+1}})u_{n+1}$.)

   On admet ensuite que si une suite (x_n) tend vers 0 alors $\lim \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$.

   b) Montrer que $\lim u_n = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}$.

2. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = \frac{1}{\cos(x)} \\ \forall n \in \mathbf{N}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}.$$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, a_n > 0$ et $b_n > 0$.

   b) (*) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n})}(b_n - a_n).$$

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n - a_n > 0$.

   d) En déduire que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

   e) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que (a_n) est majorée et que (b_n) est minorée.

   f) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent.

   g) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{b_n - a_n}{2}.$$

   h) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right).$$

   On en déduit que $\lim a_n = \lim b_n$. On note ℓ cette limite.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = u_n \frac{\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos^2(x)} \text{ et } b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)}.$$

   b) En déduire la valeur de ℓ.