

DEVOIR SURVEILLÉ # 2

Date : 13 novembre 2024

Durée : 4h

On rappelle les formules de trigonométrie suivantes : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

SOMMES

Calculer les sommes suivantes :

1.

$$\sum_{i=0}^n (i+2)^2.$$

2.

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{2^{2j}}.$$

3.

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

4.

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}.$$

5.

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k^2}{k+1}.$$

Solution

1.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (i+2)^2 &= \sum_{k=2}^{n+2} k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n+2} k^2 - 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1. \end{aligned}$$

2. On reconnaît une somme géométrique

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{2^{2j}} &= \sum_{j=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^j \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= 4 \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{5}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{1}{n} \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n \frac{2k^2}{k+1} &= 2^n \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \\ &= 2^n \frac{n!}{n+1}.\end{aligned}$$

EXERCICES

Exercice 1 On définit la fonction f par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{1-x}\right).$$

1. Prouver que $D_f =]1, 2[$.

Solution

Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \in D_f \iff \frac{x-2}{1-x} > 0$. Une étude de signe donne $x \in]1, 2[$.

2. Dresser le tableau de variations de f .

Solution

f est dérivable par composition et quotient : $f = \ln \circ u$ avec $u(x) = \frac{x-2}{1-x}$. Pour tout $x \in]1, 2[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{1-x - (-1)(x-2)}{-(1-x)^2 u(x)} \\ &= \frac{-1}{(1-x)^2 u(x)} < 0 \\ &\text{car } u(x) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi f est strictement décroissante. Déterminons les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 2 = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - x = 0^-$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{1-x} = +\infty.$$

$$\text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1-x} = 0$$

$$\text{donc par composition, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty.$$

3. Montrer que f est injective.

Solution

Deux solutions ici, soit on suppose $f(x) = f(y)$ et il est facile de retrouver $x = y$, soit on dit qu'une fonction strictement décroissante est injective.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	1	2
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

4. Montrer que f (considérée comme une fonction de D_f dans $\mathbf{R}$) est surjective.

Solution

Soit $y \in \mathbf{R}$, on cherche $x \in]1, 2[$ tel que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = y &\iff \ln\left(\frac{x-2}{1-x}\right) = y \\
 &\iff \frac{x-2}{1-x} = e^y \\
 &\iff x-2 = -xe^y + e^y \\
 &\iff x + xe^y = 2 + e^y \\
 &\iff x(1 + e^y) = 2 + e^y \\
 &\iff x = \frac{2 + e^y}{1 + e^y}.
 \end{aligned}$$

Et on a bien $\frac{2+e^y}{1+e^y} \in]1, 2[$. Ainsi tout réel y a bien un antécédent donc la fonction est surjective.

Remarque 0.1 — On pouvait aussi utiliser le théorème de la bijection continue.

5. Donner l'expression de la bijection réciproque de f .

Solution

D'après le calcul précédent, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$.

Exercice 2 On définit la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad u_1 = -5 \quad u_2 = 13 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par : $\forall n \in \mathbf{N} \quad v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= 2u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_{n+1} - 2u_n \\
 &= 2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n \\
 &= 2u_{n+2} + u_{n+3} \\
 &= v_{n+2}.
 \end{aligned}$$

2. Déterminer l'expression de v_n .

Solution

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Ainsi il existe λ, μ des réels tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_n = (\lambda + n\mu)1^n = \lambda + n\mu.$$

De plus $v_0 = u_1 + 2u_0 = 3$ donc $\lambda = 3$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 3$ donc $\lambda + \mu = 3$ donc $\mu = 0$. Ainsi $v_n = 3$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - 2u_n + v_n = -2u_n + 3$.

4. Déterminer l'expression de la suite (u_n) .

Solution

C'est une suite arithmético-géométrique. On cherche un point fixe ℓ :

$$\ell = -2\ell + 3 \iff 3\ell = 3 \iff \ell = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - 1 = -2(u_n - 1)$ donc $(u_n - 1)$ est géométrique et alors

$$u_n - 1 = (-2)^n(u_0 - 1)$$

soit

$$u_n = 1 + (-2)^n(u_0 - 1) = 1 + (-2)^n 3 - 1.$$

Exercice 3 Soient $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. On souhaite étudier la fonction définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . On le notera D_f .

Solution

f est définie en x si $cx + d \neq 0 \iff x \neq \frac{-c}{d}$. Donc $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{-c}{d}\}$.

2. Montrer que f réalise une bijection entre D_f et $\mathbf{R} \setminus \{\alpha\}$ où α est un réel à déterminer.

Solution

Soit $y \in \mathbf{R}$, on cherche un antécédent de y par f . Soit $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{ax+b}{cx+d} = y \\ &\iff ax+b = cxy+dy \\ &\iff ax+cxy = dy-b \\ &\iff (a+cy)x = dy-b \\ &\iff x = \frac{dy-b}{a+cy} \text{ si on suppose } y \neq -\frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Donc si $y \neq -\frac{a}{c}$, y admet bien un unique antécédent par f . Pour montrer que f réalise une bijection entre D_f et $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{a}{c}\}$ il suffit de prouver que $-\frac{a}{c}$ n'a pas d'antécédent. Pour $y = -\frac{a}{c}$ l'équation devient $dy-b=0$ soit $y = \frac{b}{d}$ ce qui est impossible car $\frac{b}{d} \neq -\frac{a}{c}$ car $ad-bb \neq 0$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbf{N}$, pour tout $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on définit

$$S_m = \sum_{k=0}^n k^m.$$

1. Sans démonstration, donner les valeurs de S_0, S_1, S_2, S_3 .

Solution

$$\begin{aligned} S_0 &= n, \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2} \\ S_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $k \in \{0, \dots, 5\}$, donner les valeurs de $\binom{5}{k}$.

Solution

$$\binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = 5, \binom{5}{2} = 10, \binom{5}{3} = 10, \binom{5}{4} = 5, \binom{5}{5} = 1.$$

3. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, développer explicitement $(k+1)^5$.

Solution

$$(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1.$$

4. Exprimer $\sum_{k=0}^n (k+1)^5 - k^5$ en fonction de S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 .

Solution

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (k+1)^5 - k^5 &= \sum_{k=0}^n k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k^5 \\
&= \sum_{k=0}^n 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \\
&= 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0 \text{ par linéarité.}
\end{aligned}$$

5. Calculer $\sum_{k=0}^n (k+1)^5 - k^5$ d'une autre façon.

Solution

Par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5 - 0^5 = (n+1)^5.$$

6. En déduire la valeur de S_4 .

Solution

On en déduit que

$$S_4 = \frac{(n+1)^5 - 5S_3 - 10S_2 - 5S_1 - S_0}{5}.$$

Exercice 5 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer la somme

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n kx^k.$$

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

1. Montrer que $xf'(x) = S_n(x)$.

Solution

On en déduit que Par linéarité de la dérivée,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1}$$

donc

$$xf'(x) = \sum_{k=0}^n kx^k.$$

2. Calculer la somme $f(x)$ puis en déduire une autre valeur pour $f'(x)$.

Solution

La somme vaut, pour $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En dérivant, on obtient pour tout $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

3. En déduire la valeur de $S_n(x)$.

Solution

On en déduit

$$S_n(x) = xf'(x) = x \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Exercice 6

1. **Question de cours.** Donner, sans démonstration, le tableau de variation de la fonction Arctangente, limites comprises.
2. Montrer que pour tout x, y tels que $\tan(x), \tan(y)$ et $\tan(x + y)$ existent, on a :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}.$$

En déduire que

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}.$$

Solution

Pour des tels x, y on a :

$$\begin{aligned}\tan(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} \\ &= \frac{\cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)}{\cos(x) \cos(y) \sin(x) \sin(y)}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)} &= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \frac{\sin(y)}{\cos(y)}} \\ &= \cos(x) \cos(y) \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)}{\cos(x) \cos(y) \sin(x) \sin(y)} \\ &= \tan(x + y), \text{ d'où l'égalité annoncée.}\end{aligned}$$

Pour la deuxième formule

$$\begin{aligned}\tan(x - y) &= \tan(x + (-y)) \\ &= \frac{\tan(x) + \tan(-y)}{1 - \tan(x) \tan(-y)} \\ &= \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)} \text{ car } \tan \text{ est impaire.}\end{aligned}$$

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\tan(\arctan(1 + x) - \arctan(x)) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1 + x + x^2}\right)\right).$$

En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\arctan(1+x) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) + k\pi.$$

Solution

On calcule :

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(1+x) - \arctan(x)) &= \frac{\tan(\arctan(1+x)) - \tan(\arctan(x))}{1 + \tan(\arctan(1+x))\tan(\arctan(x))} \\ &= \frac{1+x-x}{1+(1+x)x} \\ &= \frac{1}{1+x+x^2} \\ &= \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right).\end{aligned}$$

$\arctan(1+x) - \arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ ont la même tangente, donc ils sont distants d'un multiple de π donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\arctan(1+x) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) + k\pi.$$

4. Montrer que

$$-\pi < \arctan(1+x) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) < \pi$$

Solution

Les arguments dans les arctangentes sont strictement positifs, donc les arctangentes sont strictement comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\arctan(1+x) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) < \frac{\pi}{2} - 0 - 0 \leq \frac{\pi}{2} < \pi$$

et

$$\arctan(1+x) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) > 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} > -\pi.$$

On a bien obtenu l'encadrement voulu.

5. En déduire que $\arctan(1+x) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

Solution

$\arctan(1+x) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ est un multiple entier de π strictement compris entre $-\pi$ et π , donc c'est forcément zéro.

6. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Solution

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) &= \sum_{k=0}^n \arctan(k+1) - \arctan(k) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) \text{ par télescopage} \\ &= \arctan(n+1). \end{aligned}$$

Exercice 7 Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - 2y).$$

Montrer que f est bijective.

PROBLÈME : UN COUPLE DE SUITES

Dans tout le problème, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est un réel fixé.

1. On définit une suite (u_n) par

$$u_0 \cos(x) \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

a) (*) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{\sin(x) \cos(x)}{2^n \sin(\frac{x}{2^n})}$. (Indication : pour l'hérédité, on pourra commencer par calculer $\sin(\frac{x}{2^{n+1}}) u_{n+1}$.)

On admet ensuite que si une suite (x_n) tend vers 0 alors $\lim \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$.

b) Montrer que $\lim u_n = \frac{\sin(x) \cos(x)}{x}$.

2. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = \frac{1}{\cos(x)} \\ \forall n \in \mathbf{N}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

b) (*) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n})} (b_n - a_n).$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n - a_n > 0$.

d) En déduire que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

e) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que (a_n) est majorée et que (b_n) est minorée.

f) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent.

g) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}.$$

h) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right).$$

On en déduit que $\lim a_n = \lim b_n$. On note ℓ cette limite.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = u_n \frac{\cos(\frac{x}{2^n})}{\cos^2(x)} \text{ et } b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)}.$$

b) En déduire la valeur de ℓ .