

DEVOIR SURVEILLÉ # 3

Date : 18 décembre 2024 - Durée : 4h - Barème indicatif : 5 - 9 - 9.

1. EXERCICES

Consignes : Vous avez deux choix :

- Choix 1 : Exercices 1,2,3,4
- Choix 2 : Exercices 1,2,5

Exercice 1 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = m \end{cases}$$

avec $m \in \mathbf{R}$. On distinguera deux cas en fonction de la valeur de m (ceux-ci apparaîtront naturellement si vous réalisez un pivot de Gauss).

Exercice 2 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n + \cos(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto x + \cos(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Montrer que (u_n) converge.
4. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 3 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq \lambda$. Calculer AM et MA et en déduire que M commute avec A si et seulement si M est diagonale.

Exercice 4 On considère une suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 5 Quelles sont les fonctions $f \in C(\mathbf{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbf{R}, f(x^2) = f(x)$.

1. Démontrer que f est paire.
2. Soit $x \in]-1, 1[$, on définit une suite (u_n) par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2.$$

Montrer que $f(u_n)$ est constante. Démontrer que $\lim u_n = 0$ puis que $f(x) = f(0)$.

3. Soit $x \in]1, +\infty[$, on définit une suite (u_n) par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

Montrer que $f(u_n)$ est constante. Démontrer que $\lim u_n = 1$ puis que $f(x) = f(1)$.

4. Montrer que $f(0) = f(1)$. (Si besoin, faire un dessin!).
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}, f(x) = f(0)$.
6. Quelles sont les fonctions solution du problème?

2. PROBLÈME 1 - ANALYSE

On considère la fonction définie sur $]0, 1[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. Montrer f est continue en 0.
3. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$
b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$. (On calculera $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Indication : on doit trouver zéro!)
5. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en faisant figurer la tangente en 0 et les asymptotes infinies éventuelles.
7. Justifier que f réalise une bijection entre $]0, 1[$ et un intervalle à déterminer. Dresser le tableau de variations de f^{-1} , limites comprises.

Partie B - Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on note u_n .

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

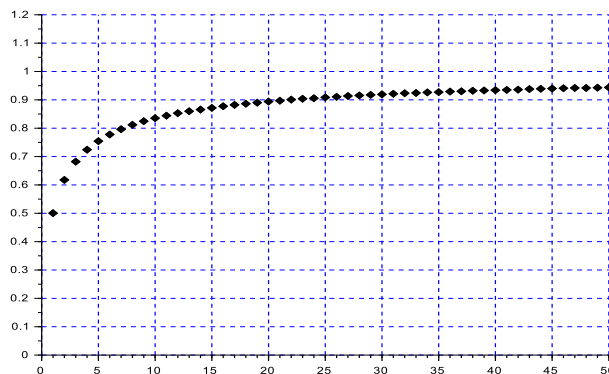
10. Déterminer u_1 et u_2 .

11. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):  
    a = 0  
    b = 1  
    while _____:  
        c = (a + b) / 2  
        if (c**n + c - 1) > 0 :  
            _____  
  
    else:  
        _____  
    return(_____)
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.

Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite?



12. a) Montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $f(u_n) = n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

3. PROBLÈME 2 - PUISSANCES D'UNE MATRICE

Partie A - Introduction

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer la matrice A à l'aide des matrices D et N .
2. Vérifier que $DN = N$ et calculer ND . Les matrices N et D commutent-elles?

La décomposition précédente de A ne permet pas de calculer A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton. L'objet de l'exercice est de proposer deux méthodes pour calculer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie B - Première méthode

On considère trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que

$$a_1 = -1, b_1 = 0, c_1 = 1$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} = a_n - 1, \quad b_{n+1} = b_n - c_n, \quad c_{n+1} - c_n = 2^n.$$

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n en fonction de n .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $c_n = 2^n - 1$.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (n+1) - 2^n$.
7. Justifier qu'il existe trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = a_n, v_n = b_n \text{ et } w_n = c_n.$$

9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^n en explicitant ses coefficients.

Partie C - Seconde méthode

10. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = P$.
11. On note $S = P^{-1}AP$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; montrer que $S = D + M$ (où D est la matrice donnée en début d'énoncé).
12. Soit $k \in \mathbf{N}$, exprimer D^k en fonction de k .
13. Calculer M^2 . et en déduire, pour tout entier $k \geq 2$, la matrice M^k .
14. Montrer que $MD = DM$.
15. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, exprimer $\binom{n}{1}$ en fonction de n .
16. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$S^n = D^n + nD^{n-1}M = D^n + nM.$$

C'est ici qu'on peut s'en sortir avec le binôme de Newton mais ce n'est pas obligatoire.

17. Exprimer S^n en explicitant ses coefficients en fonction de n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.
18. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = PS^nP^{-1}$.
19. Déduire des deux questions précédentes l'expression A^n en explicitant ses coefficients en fonction de n .