DEVOIR SURVEILLÉ # 3

Date : 18 décembre 2024 - Durée : 4h - Barème indicatif : 5 - 9 - 9.

1. EXERCICES

Consignes : Vous avez deux choix :

- Choix 1 : Exercices 1,2,3,4
- Choix 2 : Exercices 1,2,5

Exercice 1 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x-2y+3z & =1 \\ 2x+y+z & =4 \\ x+3y-2z & =m \end{cases}$$

avec $m \in \mathbf{R}$. On distinguera deux cas en fonction de la valeur de m (ceux-ci apparaîtront naturellement si vous réalisez un pivot de Gauss).

Exercice 2 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \cos(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto x + \cos(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Montrer que (u_n) converge.
4. Déterminer $\lim u_n$.

Solution

1.
2. On montre la propriété par récurrence. L'initialisation est évidente. Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbf{N}$, si $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(u_n)$ aussi d'après le tableau de variations.
3. (u_n) est majorée par $\frac{\pi}{2}$ et pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = \cos(u_n) \geqslant 0 \text{ car } u_n \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

La suite est donc croissante est majorée donc elle converge.

4. En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient

$$\ell = \ell + \cos(\ell) \text{ donc } \cos(\ell) = 0 \text{ donc } \ell = \frac{\pi}{2}$$

car $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 3 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq \lambda$. Calculer AM et MA et en déduire que M commute avec A si et seulement si M est diagonale.

Solution

On calcule

$$MA = \begin{pmatrix} a\lambda & b\mu \\ c\lambda & d\mu \end{pmatrix} \text{ et } AM = \begin{pmatrix} a\lambda & b\lambda \\ c\mu & d\mu \end{pmatrix}.$$

= Ainsi $AM = MA \iff \begin{cases} b\mu = b\lambda \\ c\mu = c\lambda \end{cases} \iff b = 0$ et $c = 0$ car $\lambda \neq \mu$. Ainsi AM = MA si et seulement M est diagonale.

Exercice 4 On considère une suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

Remarque 1.1 — Pour étudier la monotonie de (S_{2n}) on calcule $S_{2(n+1)} - S_{2n}$ soit $S_{2n+2} - S_{2n}$. Pour la suite des termes impairs cela donne $S_{2n+3} - S_{2n+1}$.

Solution

Étudions la monotonie de (S_{2n}).

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{-2n-1+2n+2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0 \end{aligned}$$

donc (S_{2n}) est croissante.
De même,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

donc (S_{2n+1}) est décroissante.

De plus,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

qui tend vers zéro.
Les deux suites sont donc adjacentes et donc convergent vers une limite commune.
Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergeant vers une même limite, on peut conclure que (S_n) converge aussi vers cette limite.

Exercice 5 On souhaite déterminer quelles sont les fonctions $f \in C(\mathbf{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbf{R}, f(x^2) = f(x)$. On raisonne par analyse-synthèse et on considère f une fonction solution du problème.

1. Démontrer que f est paire.
2. Soit $x \in]-1,1[$, on définit une suite (u_n) par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2.$$

   Montrer que $f(u_n)$ est constante. Démontrer que $\lim u_n = 0$ puis que $f(x) = f(0)$.
3. Soit $x \in]1,+\infty[$, on définit une suite (u_n) par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

   Montrer que $f(u_n)$ est constante. Démontrer que $\lim u_n = 1$ puis que $f(x) = f(1)$.
4. Montrer que $f(0) = f(1)$. (Si besoin, faire un dessin !).
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}, f(x) = f(0)$.
6. Quelles sont les fonctions solution du problème ?

2. PROBLÈME 1 - ANALYSE

On considère la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\big(\ln(x)\big)^2}\big(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\big)$$

Solution

f des dérivable sur son ensemble de définition $]0,1[$ comme composée produit de fonction dérivables. De plus f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(1-x)$ et $v = \ln(x)$ donc pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{-\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x}}{\ln(x)^2} \\ &= -\frac{(1-x)\ln(1-x) + x\ln(x)}{x(1-x)\ln(x)^2}. \end{aligned}$$

2. Montrer f est continue en 0.

Solution

On calcule la limite de $f(x)$ en 0^+. On a

$$\lim(\ln(1-x)) = 0 \text{ et } \lim \ln(x) = -\infty$$

donc par quotient $\lim f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

3. a) Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\ln(t) < 0$

Solution

Soit $t \in]0,1[$, alors $\ln(t) < 0$ donc $t\ln(t) > 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$.

Solution

Comme x est dans $]0,1[$, $(x)(1-x)$ est positif donc le dénominateur est toujours positif. De plus, par la question précédente $x\ln(x) < 0$ et comme $(1-x) \in]0,1[$ il en est de même pour $(1-x)\ln(1-x)$. Dès lors

$$-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x) > 0$$

et donc $f'(x) >$. Ainsi f est strictement croissante.

4. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$. (On calculera $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Indication : on doit trouver zéro !)

Solution

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1-x)-\ln(1-0)}{x-0} = g'(0)$$

où $g : x \mapsto \ln(1-x)$ est bien dérivable avec $g'(x) = \frac{-1}{1-x}$ d'où $g'(0) = -1$.
Dès lors

$$.$$

5. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Solution

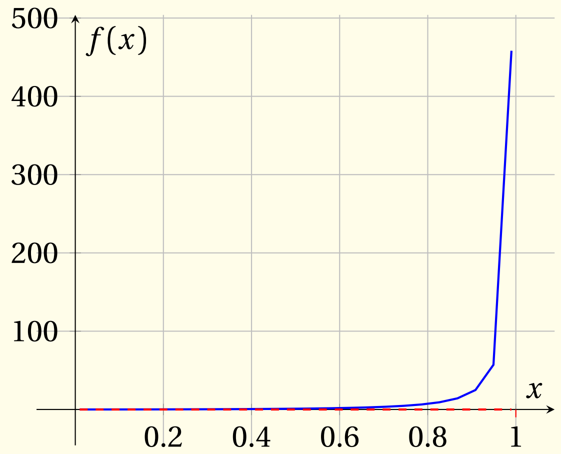
Le numérateur tend vers 0^- par continuité du logarithme. De plus

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

donc par quotient la limite de f en 1 est $+\infty$. On en déduit que la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en faisant figurer la tangente en 0 et les asymptotes infinies éventuelles.

Solution



7. Justifier que f est réalise une bijection entre $[0,1[$ et un intervalle à déterminer. Dresser le tableau de variations de f^{-1}, limites comprises.

Solution

f est strictement croissante et continue sur $[0,1[$ donc elle réalise une bijection entre $[0,1[$ et son image $[0,+\infty[$ obtenue à partir des limites. f^{-1} réalise donc une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[0,1[$.

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B - Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on note u_n.

Solution

La dérivée de la fonction est donnée par

$$x \mapsto nx + 1 > 0.$$

Donc la fonction est strictement croissante et continue et vaut -1 en 0 tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ par le théorème de la bijection.

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

Solution

Comme la fonction vaut 1 en 1 et -1 en 0 et qu'elle est strictement monotone, l'unique antécédent de 0 est dans $]0,1[$.

10. Déterminer u_1 et u_2.

Solution

Pour $n = 1$ l'équation dévient

$$2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Donc $u_1 = \frac{1}{2}$. Pour $n = 2$ elle devient

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

C'est une équation du second degré de discriminant

$$\Delta = 5.$$

Donc $u_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car l'autre solution $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ est négative.

11. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

    b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
    Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

    Solution

    On conjecture que la suite est croissante et majorée donc converge, peut être vers 1.

    c) i. Montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $f(u_n) = n$.

Solution

Pour tout n de $\mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= \frac{\ln(u_n^n}{u_n} \\ &= n\frac{\ln(u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= n. \end{aligned}$$

ii. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

Solution

La suite (n) est croissante et la bijection réciproque de f est croissante par théorème de la bijection donc par composition $(f(u_n))$ est croissante.

iii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Solution

$\lim n = +\infty$ donc $\lim f^{-1}(n) = \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$.

3. PROBLÈME 2 - PUISSANCES D'UNE MATRICE

Partie A - Introduction

On considère les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer la matrice A à l'aide des matrices D et N.

Solution

$\mathrm{A} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$.

b) Vérifier que $\mathrm{DN} = \mathrm{N}$ et calculer ND. Les matrices N et D commutent-elles ?

Solution

Les matrices ne commutent pas.

La décomposition précédente de A ne permet pas de calculer A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton. L'objet de l'exercice est de proposer deux méthodes pour calculer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Partie B - Première méthode

On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que

$$a_1 = -1, b_1 = 0, c_1 = 1$$

et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_{n+1} = a_n - 1, \quad b_{n+1} = b_n - c_n, \quad c_{n+1} - c_n = 2^n.$$

a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n en fonction de n.

Solution

C'est une suite arithmétique, ce qui donne

$$a_n = n.$$

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

Solution

On reconnaît une somme géométrique qui vaut

$$2 \times \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^n - 2.$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $c_n = 2^n - 1$.

Solution

On somme l'égalité $c_{k+1} - c_k = 2^k$ pour k entre 1 et $n-1$ pour obtenir, par télescopage

$$c_n - c_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2 \text{ d'après Q2}$$

donc

$$c_n = 2^n - 2 + c_1 = 2^n - 1.$$

On peut aussi raisonner par récurrence (facile à rédiger).

d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = (n+1) - 2^n$.

Solution

Raisonnement par récurrence.

e) Justifier qu'il existe trois suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Solution

A est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc A^n est aussi triangulaire supérieure avec des $1^n = 1$ sur la diagonale, d'où l'existence de ces suites.

f) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = a_n, v_n = b_n \text{ et } w_n = c_n.$$

Solution

Raisonnement par récurrence.

g) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, une expression de A^n en explicitant ses coefficients.

Solution

On obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n+1-2^n \\ 0 & 1 & 2^n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie C - Seconde méthode

a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = P$.

Solution

On calcule $P \times P = I_3$. Donc P est inversible et $P^{-1} = P$.

b) On note $S = P^{-1}AP$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; montrer que $S = D + M$ (où D est la matrice donnée en début d'énoncé).

c) Soit $k \in \mathbf{N}$, exprimer D^k en fonction de k.

Solution

C'est une puissance d'une matrice diagonale :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

d) Calculer M^2. et en déduire, pour tout entier $k \geqslant 2$, la matrice M^k.

Solution

On obtient $M^2 = 0_3$. On en déduit $M^k = 0_3$ dès que $k \geqslant 2$.

e) Montrer que $MD = DM$.

Solution

$MD = DM = M$.

f) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, exprimer $\binom{n}{1}$ en fonction de n.

Solution

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

g) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$S^n = D^n + nD^{n-1}M = D^n + nM.$$

C'est ici qu'on peut s'en sortir avec le binôme de Newton mais ce n'est pas obligatoire.

Solution

Les matrices M et D commutent donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
S^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} M^k \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} M^k \text{ car } M^k = 0_3 \text{ si } k \geqslant 2 \\
&= D^n + nD^{n-1}M \\
&= D^n + nM \text{ car } D^k M = M \text{ d'après Q14.}
\end{aligned}$$

h) Exprimer S^n en explicitant ses coefficients en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Solution

On obtient

$$\begin{aligned}
&S^n = D^n + nM \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

i) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, \mathrm{A}^n = \mathrm{PS}^n\mathrm{P}^{-1}$.

Solution

Récurrence classique.

j) Déduire des deux questions précédentes l'expression A^n en explicitant ses coefficients en fonction de n.

Solution

On calcule

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{PS}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PS}^n\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & n & n+1-2^n \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$