

DEVOIR SURVEILLÉ # 5

Date : 2 avril 2025 - Durée : 4h

Barème : 10, 10, 20, 20, 40 (en pourcentage du total).

1. EXERCICES

1. Justifier que la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{2^{2n+1}}.$$

2. Déterminer la nature de la série suivante en fonction de $\alpha > 0$.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}.$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{R}_n[X]$. On définit

$$F = \{P \in E, P(1) = P(0)\}.$$

Déterminer une base de F et justifier que $\dim(F) = n$. Montrer que $E = F \oplus \text{Vect}(x)$.

2. SYMÉTRIES VECTORIELLES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = I_n$. Soit $E = M_{n,1}(\mathbf{R})$, on définit

$$F = \{X \in E, MX = X\} \text{ et } F' = \{X \in E, MX = -X\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de M . On admet que F' en est un.
2. Montrer que $F \cap F' = \{0_E\}$.
3. Soit $X \in E$, montrer que

$$X + MX \in F \text{ et } X - MX \in F'.$$

4. En déduire que $E = F \oplus F'$.

3. CARRÉS MAGIQUES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n M_{i,j} \text{ (la somme des coefficients de la matrice sur ligne } i)$$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_j(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,j} \text{ (la somme des coefficients de la matrice sur colonne } j).$$

On note aussi

$$d_1(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,i} \text{ et } d_2(M) = \sum_{i=1}^n M_{n+1-i,i}$$

les sommes sur les diagonales.

On dit qu'une matrice est un **carré magique** si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $\ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$. On note alors $s(M)$ la valeur commune et on dit que M est un carré magique de somme $s(M)$. On note E_n l'ensemble des carrés magiques et K_n l'ensemble des carrés magiques de somme nulle. On note J_n la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ avec 1 pour chaque coefficient.

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel. On admet que K_n en est un.
2. Montrer que $E_2 = \text{Vect}(J_2)$ et $K_2 = \{0_2\}$.
3. Soit $M \in E_n$. Montrer que $M - \frac{s(M)}{n} J_n \in K_n$. En déduire que $E_n = K_n + \text{Vect}(J_n)$.
4. Montrer que $E_n = K_n \oplus \text{Vect}(J_n)$.
5. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$, montrer qu'il existe de matrices (M_1, M_2) où
 - M_1 est antisymétrique
 - M_2 est symétrique
 - $M = M_1 + M_2$.
 - Indication : on obtiendra

$$M_1 = \frac{M - {}^t M}{2} \text{ et } M_2 = \frac{M + {}^t M}{2}.$$

Dans la suite de l'exercice, on traite le cas $n = 3$.

6. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $M \in K_3$. Montrer que $M_1 \in K_3$ et $M_2 \in K_3$. Montrer que $M_1 \in \text{Vect}(A)$ et $M_2 \in \text{Vect}(B)$.

7. En déduire une base de K_3 puis montrer que (J_3, A, B) est une base de E_3 .

4. ÉTUDE DE QUELQUES SÉRIES

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$.
c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n .
d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Informatique.

- a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):  
    k=1  
    s=1  
    while s<a:  
        k=k+1  
        s=s+1/k  
    return k
```

Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

- b) L'appel

```
np.exp(49)
```

renvoie : 1.9073465724950998e+21.

Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
c) Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
d) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

5. PROBLÈME

On admet que, si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$.
 Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i.$$

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i$.
 En déduire ensuite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n y_k = T_n$.
 b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
2. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}$.
 On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

- a) On dit qu'une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle I est concave si pour tout $x \in I$, $f''(x) < 0$. Montrer que $\ln$ est concave sur un intervalle à déterminer.
- b) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I , alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)$.
 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.
- c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^n k x_k\right)^{1/n}$.
 En déduire que : $z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n$.
- d) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
- e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.
- f) Etablir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.
 Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $1, n-1$, on a : $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^1 \ln(x) dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2, -1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.

Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ parti-

culière que l'on note $(x_n(N))_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in \{1, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbf{N}^*, z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^n x_k(N)\right)^{1/n}$.

a) Ecrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

c) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

6. FONCTIONS ABSOLUMENT MONOTONES

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction $\mathbf{C}^\infty$ de I à valeurs dans $\mathbf{R}$,

On dit que la fonction f est Absolument Monotone sur I si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

1. Montrer que $\exp$ est absolument monotone sur $\mathbf{R}$.

2. **Généralités et Exemples.**

a) Soient f et g deux fonctions Absolument Monotone sur I .

Montrer que les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont Absolument Monotone sur I .

b) Soit la fonction $f : x \mapsto -\ln(1-x)$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1[$, calculer $f^{(n)}(x)$. En déduire que f est Absolument Monotone sur $[0, 1[$.

c) À partir du lien entre $\tan'$ et $\tan$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$
En déduire que la fonction $\tan$ est Absolument Monotone sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

3. Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ en 0^+ .

On suppose dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $]0, b[$ avec $b > 0$.

a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et $f(0) \geq 0$.

b) Montrer que le prolongement est $\mathbf{C}^1$ en 0 et que $\forall n \in \mathbf{N}, f^{(n)}(0) \geq 0$.

c) Un tel prolongement est-il possible en b ?

4. Soit f une fonction $\mathbf{C}^\infty$ sur $[0, b[$ avec $b > 0$. Justifier que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0, b[, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

5. **Série de Taylor.** On considère dans cette question que la fonction f est Absolument Monotone sur $[0, b[$ avec $b > 0$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, b[$, on considère

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

La question précédente Q4. assure que $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

a) Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge.

b) Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $0 < x < y < b$.

i. Montrer que : $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu) \frac{(1-u)^n}{n!} dt$

ii. En déduire que : $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$

iii. Montrer que la suite $(S_n(x))$ converge vers $f(x)$