DEVOIR SURVEILLÉ # 5

Date : 2 avril 2025 - Durée : 4h

Barème : 10, 10, 20, 20, 40 (en pourcentage du total).

1. EXERCICES

1. Soit $N \in \mathbf{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-3)^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-3)^n}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{-3}{4}\right)^n.$$

   On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{-3}{4} \in]-1,1[$ donc elle est convergente. Ainsi la série étudiée converge vers

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}\frac{4}{7} = \frac{4}{14}.$$

2. Comme $\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers zéro, on peut utiliser les équivalents usuels

$$\sin(\frac{1}{n^\alpha}) \sim \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } 1-\cos(\frac{1}{n^\alpha}) \sim \frac{1}{2(n^\alpha)^2}.$$

   Ainsi, le terme général de la série est équivalent à

$$\frac{1}{2n^{2\alpha}} \times \frac{n^\alpha}{1} = \frac{1}{2n^\alpha}.$$

   Par critère d'équivalence pour les SATP, la série converge ssi la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ce qui est le cas ssi $\alpha > 1$ car c'est une série de Riemann.

3.

$$F = \{P \in E, P(1) = P(0).\}$$

   Soit $= \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in E$. On a

$$P \in E \iff P(1) = P(0) = \sum_{i=0}^{n} p_i = p_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Il y a une unique équation donc on va pouvoir poser n paramètres $p_0, \dots p_1, \dots, p_{n-1}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} \in \mathrm{E} &\iff p_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\
&\iff \mathrm{P} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots p_{n-1} x^{n-1} - (\sum_{i=1}^{n-1} p_i) x^n \\
&\iff \mathrm{P} = p_0 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i (x^i - x^n) \\
&\iff \mathrm{P} \in Vect(1, x - x^n, x^2 - x^n, \dots, x^{n-1} - x_n).
\end{aligned}$$

Remarque : la famille étant libre car échelonnée en degré, on peut prouver d'une autre façon la dimension de F ici.
Pour montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{Vect}(x)$. On montre que

- $\dim \mathrm{E} = n + 1 = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{Vect}(x)$.
- $\mathrm{F} \cap \mathrm{Vect}(x) = \{0_\mathrm{E}\}$: soit $\mathrm{P} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{Vect}(x)$, on a $\mathrm{P} \in \mathrm{Vect}(x)$ donc $\mathrm{P} = \lambda x$ pour un certain réel λ. Comme $\mathrm{P} \in \mathrm{F}, \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$ donc $0 = \lambda$ donc $\mathrm{P} = 0_\mathrm{E}$. On a donc l'inclusion $\mathrm{F} \cap \mathrm{Vect}(x) \subset \{0_\mathrm{E}\}$ et donc l'égalité car l'inclusion réciproque est toujours vraie.

2. SYMÉTRIES VECTORIELLES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_n$. Soit $\mathrm{E} = \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on définit

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{E}, \mathrm{MX} = \mathrm{X}\} \text{ et } \mathrm{F}' = \{\mathrm{X} \in \mathrm{E}, \mathrm{MX} = -\mathrm{X}\}.$$

1. On a
   - Par définition $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$,
   - F est non vide car $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}$. En effet $\mathrm{M}0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}$.
   - Soient $\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathrm{F}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{M}(\mathrm{X} + \lambda \mathrm{X}') &= \mathrm{MX} + \lambda \mathrm{MX}' \\
   &= \mathrm{X} + \lambda \mathrm{X}'
   \end{aligned}$$

   donc $\mathrm{X} + \lambda \mathrm{X}' \in \mathrm{F}$.

   On vient donc de prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{F}'$, on a $\mathrm{MX} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{MX} = -\mathrm{X}$ donc$\mathrm{X} = -\mathrm{X}$ donc $\mathrm{X} = 0_\mathrm{E}$. Ainsi $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}' \subset \{0_\mathrm{E}\}$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on a égalité.

3. Soit $X \in E$, on a

$$M(MX + X) = M^2X + MX = X + MX$$

donc $X + MX \in F$. De même pour $MX - X \in F'$.

4. Soit $X \in E$, on a

$$X = \frac{1}{2}(X + MX) + \frac{1}{2}(X - MX)$$

avec $\frac{1}{2}(X + MX) \in F$ et $\frac{1}{2}(X - MX) \in F'$ donc on a $X \in F + F'$ et donc $E \subset F + F'$ donc $E = F + F'$ car l'inclusion réciproque est toujours vraie. Ainsi $E = F + F'$. Comme $F \cap F' = \{0_E\}$, on déduit que $E = F \oplus F'$.

3. CARRÉS MAGIQUES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note pour tout $i \in \{1, \dots n\}$,

$$\ell_i(M) = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} \text{ (la somme des coefficients de la matrice sur ligne i)}$$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_j(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} \text{ (la somme des coefficients de la matrice sur colonne j).}$$

On note aussi

$$d_1(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \text{ et } d_2(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{n+1-i,i}$$

les sommes sur les diagonales.

On dit qu'une matrice est un **carré magique** si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$. On note alors $s(M)$ la valeur commune et on dit que M est un carré magique de somme $s(M)$. On note E_n l'ensemble des carrés magique et K_n l'ensemble des carrés magiques de somme nulle. On note J_n la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ avec 1 pour chaque coefficient.

1. On prouve que c'est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$.
   - Par définition : $E_n \subset M_n(\mathbf{R})$.
   - E_n est non vide car 0_n est bien un carré magique, de somme nulle.
   - Soient A, B dans E_n et $\lambda \in \mathbf{R}$. Sur toutes les lignes, colonnes, ou diagonales, la somme es coefficients de $A + \lambda B$ est $s(A) + \lambda s(B)$ donc $A + \lambda B$ est bien un carré magique.

   Ainsi E_n est bien sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$.
2. - E_2 : $J_2 \in E_2$ donc $\mathrm{Vect}(J_2) \subset E_2$ car c'est un espace vectoriel. Pour la réciproque, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2$. On a $a + b = a + d$ donc $b = d$. De plus $b + d = c + d$ donc $b = c$. De plus $a + b = c + d$ donc $a = b = c = d$. Donc $M \in \mathrm{Vect}(J_2)$. Ainsi on a l'égalité.
   - Soit $M \in K_2$, $M = \lambda J_2$ car $M \in E_2$. Or $s(M) = 0$ donc $2\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $M = 0_2$. D'où $K_2 \subset \{0_2\}$ et donc l'égalité car l'inclusion réciproque est évidente.
3. Soit $M \in E_n$. Par linéarité de la somme, sur n'importe quelle ligne, colonne, ou diagonale, on obtient $s(M - \frac{s(M)}{n} J_n) = s(M) - s(M)s(J_n)/n = s(M) - s(M)n/n = 0$ donc $M - \frac{s(M)}{n} J_n \in K_n$. En décrivant

$$M = M - \frac{s(M)}{n} J_n + \frac{s(M)}{n} J_n$$

avec

$$\mathrm{M} - \frac{s(\mathrm{M})}{n}\mathrm{J}_n \in \mathrm{K}_n \text{ et } \frac{s(\mathrm{M})}{n}\mathrm{J}_n \in \mathrm{Vect}(\mathrm{K}_n)$$

on prouve que $\mathrm{M} \in \mathrm{K}_n + \mathrm{Vect}(\mathrm{J}_n)$. C'est vrai pour toute matrice $\mathrm{M}_i n\mathrm{E}_n$ d'où la somme d'espaces vectoriels demandée.

4. D'après la somme précédente, il suffit de montrer que $\mathrm{K}_n \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{J}_n) = \{0_n\}$. Démontrons le : soit $\mathrm{M} \in \mathrm{K}_n \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{J}_n)$, M s'écrit $\lambda \mathrm{J}_n$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc $s(\mathrm{M}) = n\lambda$ or $s(\mathrm{M}) = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $\mathrm{M} = 0_n$. On a donc une inclusion, l'autre étant triviale, on bien l'égalité. Des deux dernières questions on déduit que $\mathrm{E}_n = \mathrm{K}_n \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{J}_n)$.
5. Il suffit de vérifier que les trois points demandés.
   Dans la suite de l'exercice, on traite le cas $n = 3$.
6. Cette question est la plus chère du sujet!

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{K}_3$ On la décompose sous la forme $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 \in \mathrm{K}_3$. Calculons par exemple $c_i(\mathrm{M}_1)$:

$$\begin{aligned}
c_j(\mathrm{M}_1) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}}{2}\right]_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{M}_{i,j} + \mathrm{M}_{j,i}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j} + \frac{1}{2}\mathrm{M}_{j,i} \\
&= \frac{1}{2}c_j(\mathrm{M}) + \frac{1}{2}\ell_j(\mathrm{M}) \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

On fait de même pour les lignes et les diagonales, que ce soit pour M_1 ou pour M_2. On obtient donc $\mathrm{M}_1 \in \mathrm{K}_3$ et $\mathrm{M}_2 \in \mathrm{K}_3$.

Montrons maintenant que $\mathrm{M}_1 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$ (on admettra le résultat pour M_2 qui se fait de la même façon). M_1 est antisymétrique, donc sa diagonale est nulle. Notons ses coefficients $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. Comme la somme sur les lignes doit faire zéro on obtient $b = -a$, $a = c$, $b = -c$ donc

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} a\mathrm{A}.$$

Ainsi $M_1 \in \text{Vect}(A)$.

Soit $M \in K_3$. Avec les notations précédentes $M = M_1 + M_2$ et d'après la question précédente il existe λ, μ des réels tels que $M_1 = \lambda A$ et $M_2 \lambda B$. Ainsi (A, B) est génératrice de K_3. Comme c'est une famille échelonnée, elle est libre, c'est donc une base de K_3.

Ensuite, par le théorème de la base adaptée, comme J_3 est une base de $\text{Vect}(J_3)$ et qu'on a la somme directe $E_3 = K_3 + J_3$, (J_3, A, B) est une base de E_3.

4. ÉTUDE DE QUELQUES SÉRIES

1. a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc, pour tout $t \in [k, k+1]$ on a : $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ et en intégrant entre k et $k+1$ il vient par croissance de l'intégrale

$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t}_{=f(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t}_{=f(k)}.$$

$\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$

   b) On somme membre à membre les inégalités obtenues à la question précédente de 1 à $n-1$ pour obtenir :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)}_{=\mathrm{S}_n - f(1)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{=\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k)}_{=\mathrm{S}_n - f(n)}.$$

$\mathrm{S}_n - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{1}{n}.$

   c) Soit $n \geqslant 2$ entier. La première des inégalités de la question 7(a)ii donne : $\mathrm{S}_n \leqslant \ln n + 1$. La seconde inégalité de la question 7(a)ii donne : $\ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{S}_n$.

   On a : $\ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \ln n + 1$.

   d) D'après la question précédente, pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $1 + \dfrac{1}{n \ln n} \leqslant \dfrac{\mathrm{S}_n}{\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln n}$.

   Comme $1 + \dfrac{1}{n \ln n} \longrightarrow 0$ et $1 + \dfrac{1}{\ln n} \longrightarrow 1$, on obtient par sandwich :

$$\frac{\mathrm{S}_n}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

   ce qui démontre que $\mathrm{S}_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. ***Informatique***.

   a) Détaillons la fonction donnée.

```
def rang(a):
    k=1
        #Initialise un compteur
    s=1
    while s<a:
        k=k+1
        s=s+1/k
        #Tant que la somme s est inférieure strictement à l'argument
        #de la fonction, on ajoute 1 au compteur k
        #et ajoute 1/k à la somme s.
    return k
        #Retourne le nombre de termes nécessaires pour que la somme s
        #soit supérieure à l'argument de la fonction
```

L'appel `rang(50)` fournira le plus petit entier naturel n pour lequel $S_n \geqslant 50$.

b) D'après le code proposé et la question 7(a)ii, pour $n = 1,9\,10^{21}$, on a :

$$S_n \leqslant \ln n + 1 \leqslant 49 + 1 = 50.$$

Le nombre de calculs nécessaires à l'exécution de l'appel `rang(50)` est supérieur à $1,9\,10^{21}$, ce qui est très beaucoup.

3. a) On a (progression géométrique) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$.

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a alors :

$$\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\right) \mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$, i.e. :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^x \underbrace{\frac{t^n}{1-t}}_{\leqslant \frac{x^n}{1-x}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

puisque $x \in [0,1[$. Par sandwich on obtient : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

d) D'après les questions 7(c)ii et 7(c)iii, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x).$$

Ainsi la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

5. PROBLÈME