DEVOIR SURVEILLÉ # 2

Date : 9 novembre 2023

Durée : 4h

Barème indicatif :

- Calcul de sommes : 5 pts
- Exercices : 16 pts $(2+2+2+3+2+3+2)$
- Problème : 9 pts

La rédaction et la présentation de la copie seront largement pris en compte dans la notation.

1. CALCUL DE SOMMES

Calculer les sommes suivantes.

1. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n 3^{2n}.$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 + k.$$

3. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

   On pourra chercher des réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

   $$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}.$$

4. $$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

5. $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \ln(x^{ij})$$

   où $x > 0$ est un réel fixé.

2. EXERCICES

Exercice 1 On définit une fonction f par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que f réalise une bijection de son ensemble de définition vers un $\mathbf{R}$. On déterminera l'expression de la bijection réciproque.

Exercice 2 Résoudre l'équation suivante dans $\mathbf{R}$:

$$\tan(2x-2) = \sqrt{3}.$$

Exercice 3 Soit A l'ensemble défini par

$$\mathrm{A} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{1+n}, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Montrer que A est borné. Déterminer $\inf \mathrm{A}$ et $\sup \mathrm{A}$.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbf{R}$ un réel qui n'est pas de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\sin\left(jx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(jx - \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(jx).$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(jx).$$

Exercice 5 Soit $x \in \mathbf{R}$. On souhaite calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le produit

$$\mathrm{P}_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x).$$

1. Calculer $\sin(x)\mathrm{P}_0(x)$, $\sin(x)\mathrm{P}_1(x)$, $\sin(x)\mathrm{P}_2(x)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sin(x)\mathrm{P}_n(x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}.$$

3. Conclure.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{Z}$ par

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est à valeur dans $\mathbf{N}$.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ est bijective.

Exercice 7

On rappelle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, j \in \mathbf{N}^*$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

3. PROBLÈME

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ (on prend $a \neq 1$). On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Si (u_n) converge, montrer que $\ell = \sqrt{a}$. *On pourra utiliser, sans démonstration supplémentaire, que si (u_n) converge vers ℓ alors (u_{n+1}) aussi.*
3. Réaliser l'étude de la fonction

$$f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

   On prendra soin de réaliser un tableau de variations qui pourra être très utile pour la suite.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{a}$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1
6. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{u_n}.$$

8. A partir de cette question, on suppose que $a > 1$ que la valeur u_0 vérifie. $|u_0 - \sqrt{a}| \leqslant 1$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}.$$

9. Soit $\varepsilon > 0$. Pour obtenir $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon$, quelle valeur de n peut-on choisir ?

DEVOIR SURVEILLÉ # 2

Date : 9 novembre 2023

Durée : 4h

Barème indicatif :

- Calcul de sommes : 5 pts
- Exercices : 16 pts $(2+2+2+3+2+3+2)$
- Problème : 9 pts

La rédaction et la présentation de la copie seront largement pris en compte dans la notation.

1. CALCUL DE SOMMES

Calculer les sommes suivantes.

1.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n 3^{2n} = \sum_{k=0}^{n} (-9)^n = \frac{1-(-9)^{n+1}}{10}.$$

2.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 + k &= \sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 + \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \sum_{k'=0}^{n} k'^2 + \sum_{k=0}^{n} k \text{ avec le changement d'indice } k' = n-k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

   On pourra chercher des réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}.$$

On trouve $a=1/2$ et $b=-1/2$ d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+3}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{k+1} \text{ avec le changement k' = k+2}\\ &= \frac{1}{+2}\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\ &= prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1}{k^2}\right)\\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n}k-1}{k}\frac{\prod_{k=2}^{n}k+1}{k}\\ &= \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} \text{ par deux télescopages.}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\ln(x^{ij}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i^n}\ln(x^{ij})\\ &= \ln(x)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i^n}ij\\ &= \ln(x)\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=i^n}j\\ &= \ln(x)\sum_{i=1}^{n}i(n-i+1)\frac{i+n}{2} \text{ somme arithmétique}\\ &= \ln(x)\sum_{i=1}^{n}-i^3+i^2+i(n)(n-1)\\ &= \ln(x)\left(-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n-1)(n+1)}{2}\right).\end{aligned}$$

2. EXERCICES

Exercice 1 On définit une fonction f par

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right).$$

1. $x \in \mathrm{D}_f$ si et seulement si $\frac{x-2}{3-x} > 0$. Un tableau de signe donne $\mathrm{D}_f =]2,3[$.
2. Par composition, f est dérivable. En posant $u(x) = \frac{x-2}{3-x}$, on obtient pour tout $x \in \mathrm{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

avec $u'(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$. On a alors $f' > 0$.

3. Soit $y \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right) = y \\ &\iff e^y = \frac{x-2}{3-x} \\ &\iff e^y(3-x) = (x-2) \\ &\iff e^y + 2 = x(3e^y + 1) \\ &\iff x = \frac{e^y+2}{3e^y+1} \end{aligned}$$

y a donc un unique antécédent donné par la bijection réciproque définie par $f^{-1}(y) = \frac{e^y+2}{3e^y+1}$.

Exercice 2

$$\begin{aligned} \tan(2x-2) = \sqrt{3} &\iff \tan(2x-2) = \tan(\frac{\pi}{6}) \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, 2x - 2 = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, 2x = \frac{\pi}{6} + 2 + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbf{Z}, x = \frac{\pi}{12} + 1 + k\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{x = \frac{\pi}{12} + 1 + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}.$$

Exercice 3

$$\mathrm{A} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{1+n}, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(-1)^n + \frac{1}{1+n} \leqslant 1 + \frac{1}{1+n} 2$ donc A est majoré. De plus $(-1)^n + \frac{1}{1+n} \geqslant -1 + \frac{1}{1+n} \geqslant -1$ donc A est minoré.

sup(A) = 2 car $2 \in A$: en effet pour $n = 0$ on obtient $(-1)^0 + \frac{1}{0+1} = 2$. C'est même un maximum.

inf(A) = −1 car en faisant tendre n vers $+\infty$ on se rend compte que $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$ décroit vers −1 donc c'est nécessairement le plus grand des minorants.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbf{R}$ un réel qui n'est pas de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

1. Pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \sin\left(jx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(jx-\frac{x}{2}\right) \\ = \sin(jx)\cos(x/2)+\sin(x/2)\cos(jx)-\big(\sin(jx)\cos(x/2)-\sin(x/2)\cos(jx)\big) \\ = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(jx). \end{aligned}$$

2. En sommant l'égalité précédente pour k compris entre 0 et n on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\left(jx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(jx-\frac{x}{2}\right)=\sin(x/2)\sum_{k=0}^{n}\cos(jx).$$

La première somme est télescopique (on peut le voir en réalisant un changement de variable $j' = j+1$ ans la première somme) et vaut

$$\sin(nx+\frac{x}{2})-\sin(-\frac{x}{2}=\sin(\frac{(2n+1)x}{2}+\sin(\frac{x}{2}).$$

Ainsi,

$$\sin(\frac{(2n+1)x}{2}+\sin(\frac{x}{2})=\sin(\frac{x}{2})+\sum_{j=0}^{n}\cos(jx).$$

Si $\sin(x/2) \neq 0$, donc pour x qui n'est pas un multiple de 2π, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n}\cos(jx)=\frac{\sin(\frac{(2n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2}}+1.$$

Si $x = 2i\pi$ avec $i \in \mathrm{Z}$, alors tous les cosinus valent 1 donc la somme vaut $n+1$.

n

Exercice 5 Soit $x \in \mathbf{R}$. On souhaite calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le produit

$$\mathrm{P}_n(x)=\prod_{k=0}^{n}\cos(2^k x).$$

1.

$$\sin(x)\mathrm{P}_0(x) = \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\sin(x)\mathrm{P}_1(x) = \sin(x)\cos(x)\cos(2x) = \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{2} = \frac{\sin(4x)}{4}$$

$$\sin(x)\mathrm{P}_2(x) = \sin(x)\mathrm{P}_1(x)\cos(4x) = \frac{\sin(4x)\cos(4x)}{4} = \frac{\sin(8x)}{8}$$

2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sin(x)\mathrm{P}_n(x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}.$$

Initialisation : c'est vrai au rang $n = 0$ par la question 1.
Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que la propriété est vraie au rang n. Montrons la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}\sin(x)\mathrm{P}_{n+1}(x) &= \sin(x)\mathrm{P}_n(x)\cos(2^{n+1}x)\\ &= \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}\cos(2^{n+1}x) \text{ par H.R}\\ &= \frac{\sin(2^{n+1}x)\cos(2^{n+1})}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin(2^{n+2}x)}{2^{n+2}}.\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire. Par principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3. Conclure.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{Z}$ par

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbf{Z}$. Si $n \geqslant 0$, alors $f(n) = 2n \geqslant 0$ et est bien un entier donc $f(n) \in \mathrm{N}$. Si $n < 0$ alors $n \leqslant 1$ donc $f(n) = -2n-1 \geqslant 0$ et c'est un entier donc $f(n) \in \mathbf{N}$. f est donc bien à valeurs dans $\mathbf{N}$.
2. Soient n, n' des entiers tels que $f(n) = f(n')$. On raisonne par disjonction de cas :
Cas 1 : Si $f(n)$ est impair, alors nécessairement $n < 0$ et $n' < 0$ donc $f(n) = -2n-1$ et $f(n') = -2n'-1$ donc $-2n-1 = -2n'-1$ donc $n = n'$.
Cas 2 : Si $f(n)$ est pair, alors nécessairement $n \geqslant 0$ et $n' \geqslant 0$ donc $f(n) = 2n$ et $f(n') = 2n'$ donc $2n = 2n'$ donc $n = n'$..
Donc $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. f est donc injective.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$, montrons que n a un antécédent. On raisonne par disjonction de cas.
   Cas 1 : si n est impair, on cherche un antécédent négatif k.

$$\begin{aligned} f(k) = n &\iff -2k-1 = n \\ &\iff k = \frac{-1-n}{2} \end{aligned}$$

   qui est bien un entier positif car n est impair donc $-1-n$ est divisible par 2. Ainsi n a bien un antécédent.
   Cas 2 : si n est pair, on cherche un antécédent positif k.

$$\begin{aligned} f(k) = n &\iff 2k = n \\ &\iff k = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

   qui est bien un entier négatif car n est pair donc n est divisible par 2. Ainsi n a bien un antécédent.

Tout entier n a bien un antécédent, donc f est surjective. Comme elle est aussi injective par la question précédente on peut conclure qu'elle est bijective.

Exercice 7

On rappelle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, j \in \mathbf{N}^*$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

3. PROBLÈME

1. Il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On va en fait montrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n > 0$. C'est vrai pour $n = 0$, ce qui initialise la récurrence.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n > 0$, alors

$$u_{n+1} > \frac{u_n}{2} > 0$$

ce qui prouve l'hérédité. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et la suite est bien définie.

2. Si u_n converge vers ℓ alors

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell})$$

donc $\ell^2 = \frac{\ell^2+a}{2}$ donc $\ell^2 = a^2$, donc $\ell = \sqrt{a}$ ou $\ell = -\sqrt{a}$. Comme la suite est positive on déduit que $\ell = \sqrt{a}$.

3. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée égale

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2x^2} = \frac{x^2 - a^2}{2x^2}$$

Le tableau de variation de f est donc :

4. Montrons le par récurrence.
Initialisation : D'après le tableau de variation, f prend $\sqrt{a}$ comme minimum en $\sqrt{a}$. Ainsi $u_1 > \sqrt{a}$.
Hérédité : soit $n\mathbb{N}$, si $u_n > \sqrt{a}$, alors $f(u_n) > \sqrt{a}$ car $\sqrt{a}$ d'après le tableau. Ainsi $u_{n+1} > \sqrt{a}$.
Ainsi par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

5. Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a - u_n^2}{u_n} < 0\right) \text{ car } u_n > \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Donc la suite est décroissante à partir du rang 1.

6. (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et minorée, donc elle converge. Par la question 2, sa limite est $\sqrt{a}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a} \\ &= \frac{u_n^2}{2u_n} + \frac{a}{2u_n} - \frac{2\sqrt{a}u_n}{2u_n} \\ &= \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{2u_n} \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}. \end{aligned}$$

8. Initialisation : pour $n = 0$, la propriété est vraie par hypothèse.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose avoir la propriété. Alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{a}| &\leqslant \frac{1}{2u_n}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)^2 \text{ car } u_n > \sqrt{a} \geqslant 1 \\ &= \frac{1}{2 \times 2^{(2^n-1)2}} \\ &= \frac{1}{2^{2^{n+1}-2+1}} \\ &= \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire. Comme l'initialisation est vraie on déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. On raisonne par analyse synthèse. On sait qu'il suffit d'avoir

$$\frac{1}{2^{2^n-1}} \leqslant \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2^n-1}} \leqslant \varepsilon &\iff -\ln(2^{2^n-1}) \leqslant \ln(\varepsilon) \\ &\iff -(2^n-1)\ln(2) \leqslant \ln(\varepsilon) \\ &\iff 2^n \geqslant \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1 \\ &\iff n\ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1\right) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1\right)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre n égal à la partie entière du nombre trouvé à droite.

Devoir surveillé 2

Date : 9 novembre 2022

A. CALCULS DE SOMMES ET DE PRODUITS - 1H - 5 POINTS

Calculer les sommes et produits suivants :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-n}}{3^{-k}}$

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ (on se ramènera à une somme télescopique).

e) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

B. EXERCICES - 1H30 - 10 POINTS

Exercice 1 Étudier la fonction (domaine de définition, tableau de variations, représentation graphique et bijection réciproque si elle est bijective).

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Exercice 2 On définit deux suites (u_n) et (v_n) par leurs premiers termes u_0, v_0 et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 1-\alpha v_n \\ v_{n+1} = 1-\beta u_n \end{cases}$$

pour des réels strictement positifs α, β fixés avec $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} - \alpha\beta u_n = 1 - \alpha. \tag{E}$$

b) On appelle équation homogène associée à l'équation (E) l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - \alpha\beta x_n = 0. \tag{H}$$

Déterminer les suites (x_n) qui vérifient (H).

c) Montrer que si x_n et y_n vérifient la relation de récurrence (E), alors $(x_n - y_n)$ vérifie la relation (H). En déduire l'expression de $x_n - y_n$.

d) Dans cette question uniquement, $\alpha\beta \neq 1$. Cherchez une suite constante égale à $C \in \mathbb{R}$ qui vérifie la relation (E).

e) En déduire que la suite u_n est de la forme

$$u_n = \lambda(\sqrt{\alpha\beta})^n + \mu(-\sqrt{\alpha\beta})^n + C$$

pour certains réels λ, μ.

f) Dans cette question uniquement, $\alpha\beta = 1$. Cherchez une suite de la forme $x_n = kn (k \in \mathbb{R})$ qui vérifie la relation (E). En déduire la forme de la suite (u_n).

g) Prenons $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $u_0 = v_0 = 1$. Donner une expression explicite de la suite (u_n) (en déterminant toutes les constantes). En déduire une expression de v_n.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + x$.

a) Dresser le tableau de variations de f (avec les limites).

b) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un ensemble à déterminer.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $y_n > 0$ tel que

$$y_n + \ln(y_n) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi on définit une suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$.

d) Montrer que pour tout $n \geqslant 1, y_n \in]0, 1]$.

e) Montrer que (y_n) est monotone.

f) Montrer que (y_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ln(\ell) + \ell = 0$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

f est-elle injective ? surjective, bijective ?

C. PROBLÈME, D'APRÈS ECRICOME ECS 2015 - 1H30 - 10 POINTS

Dans tout le problème, $\mathrm{I} =]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. On définit sur I les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \text{ et } g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

   a) Vérifier que f et g sont bien définies sur I.
   b) Les fonctions f et g sont elles paires ? impaires ?
   c) Factoriser le polynôme

$$\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

   Indication : le résultat sera à mettre sous la forme $a(x - r_1)^2(x - r_2)$ pour des réels a, r_1, r_2 à déterminer.
   d) On définit une fonction u par $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Justifier que u est dérivable sur I et que

$$\forall x \in \mathrm{I}, u'(x) = \frac{\mathrm{P}(\cos(x))}{3\cos(x)^2}.$$

   e) En déduire les variations de u sur I.
   f) On définit une fonction v par $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Trouver un polynôme $\mathrm{Q}(x)$ de degré 2 (c'est à dire de la forme $\mathrm{Q}(x) = ax^2 + bx + c$) tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, v'(x) = \frac{\mathrm{Q}(\cos(x))}{(2+\cos(x))^2}.$$

   g) En déduire les variations de v sur I.
   h) Montrer que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, g(x) < x < f(x).$$

2. a) Calculer $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
   b) En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\tan(\frac{\pi}{12})$.
   c) En utilisant la **question 1.h)**, en déduire un encadrement de π.
3. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \text{ et } b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right).$$

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, justifier que

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin(\theta)^2.$$

b) En déduire que pour tout entier n

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

c) A l'aide de la **question 1.h)**, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

Remarque C.1 — Le sujet Ecricome propose la question : montrer que les membres à gauche et à droite dans la dernière inégalité convergent vers π. Nous ne pouvons pas encore faire cette question, le résultat est donc admis pour la suite. Ainsi les suites

$$u_n = 9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \text{ et } v_n = 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

sont des approximations de π.

d) Montrer que si $v_n - u_n < \epsilon$ alors $|v_n - \pi| < \epsilon$ et $|u_n - \pi| < \epsilon$.

e) En utilisant la remarque précédente, compléter la fonction **Python** suivante qui prend en entrée un réel positif **epsilon** et renvoie à l'aide des suites étudiées une approximation π à ϵ près ainsi que le nombre de termes de a_n et b_n calculés (à l'aide des relations $(*)$ et $(**)$).

```python
import numpy as np

def approxPi(epsilon):
        k = 0
        a = np.sqrt(3)/2
        b = 1/2
        while ____________:
                a = ________
                b = ________
                k = ________
        return(__________)
```

Remarque C.2 — La sujet contient aussi deux autres questions d'algorithmique sur des parties que nous n'avons pas traitées. Le sujet était par ailleurs rédigé en Scilab, conformément à l'ancien programme, mais cela ne change pas beaucoup de choses.

Devoir surveillé 2

Date : 9 novembre 2022

A. CALCULS DE SOMMES ET DE PRODUITS - 1H - 5 POINTS

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-n}}{3^{-k}} &= \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^k 2^{-n} \\
&= 2^{-n} \sum_{k=1}^{n} 6^k \\
&= 2^{-n} \times 6 \times \frac{6^n - 1}{6-1} \text{ par somme géométrique} \\
&= \frac{2^{-n} 6 (6^n - 1)}{5}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \ln(i^j) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} j \ln(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j \ln(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln(i) \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(i) \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(i) \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \ln(\prod_{i=1}^{n} i) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + (n-i)\frac{i+1+n}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{ni+n+n^2-i^2-in}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + n + n^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(2n+1)(n+1)}{2} + n^2 + n^3\right).
\end{aligned}$$

d)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k'=1}^{n+1} \frac{1}{k'+2} \text{ en posant } k' = k+1 \text{ dans la deuxieme somme.}$$

C'est une somme télescopique. On obtient

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}.$$

e)

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} \\
&= \frac{\prod_{k'=1}^{n-1} k'}{\prod_{k=2}^{n} k} \frac{\prod_{k'=2}^{n+1} k'}{\prod_{k=2}^{n} k}.
\end{aligned}$$

C'est le produit de deux produits télescopique. On obtient

$$\frac{1}{n}\frac{n+1}{2}.$$

B. EXERCICES - 1H30 - 10 POINTS

Exercice 1 Étudier la fonction (domaine de définition, tableau de variations, représentation graphique et bijection réciproque si elle est bijective).

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$, x est dans le domaine de f si et seulement si

$$x \neq 2 \text{ et } \frac{2+x}{2-x} > 0.$$

$$\frac{2+x}{2-x} > 0 \iff (2+x)(2-x)$$
$$x \in]-2,2[\text{ d'après l'étude des signes des trinomes du second degré.}$$

Ainsi $D_f =]-2,2[$.

Remarque B.1 — On peut très bien faire un tableau de signe pour trouver D_f.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \frac{2+x}{2-x}$, donc f est dérivable et pour tout $x \in D_f$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{(2-x)+(2+x)}{(2-x)^2}\frac{1}{u(x)} \\ &= \frac{4}{u(x)(2-x)^2}. \end{aligned}$$

Comme $u(x) > 0$, $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante et on peut tracer le tableau de variations de f.

x	-2		2
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante donc elle réalise une bijection de D_f sur $\mathbb{R}$ d'après le tableau de variations et le calculs de limites.

Déterminer la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\iff y = \ln(\frac{2+x}{2-x}) \\
&\iff e^y = \frac{2+x}{2-x} \\
&\iff -xe^y + 2e^y = x + 2 \\
&\iff -xe^y - x = 2 - 2e^y \\
&\iff -x(e^y + 1) = 2(1 - e^y) \\
&\iff x = 2\frac{e^y - 1}{e^y + 1}.
\end{aligned}$$

La bijection réciproque de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y \mapsto 2\frac{e^y - 1}{e^y + 1}.$$

Exercice 2

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 1 - \alpha v_{n+1} \\
&= 1 - \alpha(1 - \beta u_n) \\
&= 1 - \alpha + \alpha\beta u_n.
\end{aligned}$$

D'où

$$u_{n+2} - \alpha\beta u_n = 1 - \alpha.$$

b) (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - \alpha\beta$ de racines $r_1 = \sqrt{\alpha\beta}$ et $r_2 = -\sqrt{\alpha\beta}$. Ainsi x_n est de la forme

$$x_n = \lambda\sqrt{\alpha\beta}^n + \mu(-\sqrt{\alpha\beta})^n.$$

c) On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$x_{n+2} - y_{n+2}) - \alpha\beta(x_n - y_n) = (x_{n+2} - \alpha\beta x_n) - (y_{n+2} - \alpha\beta y_n)$
$= (1 - \alpha) - (1 - \alpha)$
$= 0$

La suite $(x_n - y_n)$ vérifie donc la relation voulue.

d) On raisonne par analyse-synthèse. Cherchons une suite constante à C qui vérifie la relation. On a alors

$$C-\alpha\beta C=1-\alpha$$

donc

$$C=\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}.$$

Réciproquement, on vérifie que cette suite constante convient.

e) D'après la question c), la suite $(u_n - C)$ vérifie la relation (H). Dès lors

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n - C = \lambda\sqrt{\alpha\beta}^n + \mu(-\sqrt{\alpha\beta})^n$$

donc

$$u_n = C+\lambda\sqrt{\alpha\beta}^n + \mu(-\sqrt{\alpha\beta})^n$$

pour des réels λ et μ.

f) Si (kn) est une suite qui convient alors

$$k(n+2)-\alpha\beta kn = 1-\alpha$$

donc

$$2k=1-\alpha$$

donc

$$k=\frac{1-\alpha}{2}.$$

Réciproquement on vérifie que cette suite convient. Comme précédemment on en déduit que

$$u_n = kn+\lambda\sqrt{\alpha\beta}^n + \mu(-\sqrt{\alpha\beta})^n.$$

g) Avec les valeurs numériques données dans l'énoncé on obtient

$$u_n=\lambda(1/2)^n+\mu(-1/2)^n+(1/2).$$

Les données initiales nous permettent de trouver λ et μ. On $u_0=1$ donc

$$1=\lambda+\mu+1/2$$

donc

$$\lambda + \mu = 1/2.$$

Comme $v_0 = 1$, on a $u_1 = 1 - (1/2)u_0 = 1/2$ donc

$$1/2 = \lambda(1/2) - \mu(1/2) + 1/2$$

donc $\lambda - \mu = 0$ donc $\lambda = \mu$. On retrouve $\lambda = \mu = 1/4$ avec la première équation. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{4}\left((\frac{1}{2^n}) + (\frac{1}{(-2)^n})\right) + \frac{1}{2}.$$

Exercice 3

a) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable de dérivée $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Elle est donc strictement croissante. Les calculs de limite donnent

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} x = 0$$

donc

$$\lim_{x\to 0} = -\infty,$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to +\infty} = +\infty.$$

x	0	1	$+\infty$
$\cos(x)$	$-\infty$	$\longrightarrow 1 \longrightarrow$	$+\infty$

b) f est strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ et $1/n \in \mathbb{R}$, $1/n$ admet un unique antécédent $y_n > 0$ par f.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $f(1) = 1 \geqslant \frac{1}{n}$, on a $f(1) \geqslant f(y_n)$. Comme f est strictement croissante cela implique que $y_n \leqslant 1$. $y_n > 0$ est déjà supposé vrai.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$, on a

$$f(y_n) \geqslant f(y_{n+1}),$$

donc, comme f est strictement croissante

$$y_n \leqslant y_{n+1}.$$

Donc y est décroissante.

f) (y_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

g) En passant à la limite dans $f(y_n) = \frac{1}{n}$ on a $f(\ell) = 0$.

Exercice 4 On va montrer séparément que f est surjective et injective. Avant de commencer, on se rend compte que si n est impair, $f(n)$ est positif ou nul, et si n est impair, $f(n)$ est strictement négatif.

Injectivité. Soient n et m des entiers tels que $f(m) = f(n)$, alors $f(m)$ et $f(n)$ sont de même signe.

- cas 1 : $f(m) = f(n) \geqslant 0$. Alors la remarque préliminaire assure que m et n sont pairs. Ainsi $f(m) = m/2$ et $f(n) = n/2)$, donc $m = n$.
- cas 2 : $f(m) = f(n) < 0$. Alors m et n sont impairs. Donc $f(m) = -(m+1)/2$ et $f(n) = -(n+1)/2$. Donc $(m+1)/2 = (n+1) = 2$ donc $m = n$.

Dans les deux cas, $m = n$. Donc f est injective.

Surjectivité. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{Z}$ on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = \mathrm{N}$. On a deux cas :

- si $\mathrm{N} \geqslant 0$, on cherche un antécédent à N sous la forme d'un entier pair. Donc on cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2k}{2} = \mathrm{N}$. On trouve $k = \mathrm{N}$. Donc un antécédent de N est 2N (qui est bien un entier positif car $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$).
- si $\mathrm{N} < 0$, on cherche un antécédent à N sous la forme d'un entier impair. Donc on cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(2k+1) = \mathrm{N}$, soit $-\frac{2k+2}{2} = \mathrm{N}$. On trouve $-k-1 = \mathrm{N}$ soit $k = -\mathrm{N}-1$. On obtient comme antécédent $-2\mathrm{N}-2+1 = -2\mathrm{N}-1$ qui est bien un entier naturel car $\mathrm{N} < -1$.

Ainsi f est surjective. Elle est donc injective et surjective donc bijective.

C. PROBLÈME, D'APRÈS ECRICOME ECS 2015 - 1H30 - 10 POINTS

Partie 1.

a) Les deux fonctions sont bien définies sur I car il est inclus dans le domaine de tangente. De plus $2+\cos(x)$ est toujours non nul donc il n'y a pas de problème pour g.

b) Les deux fonctions sont impaires (calcul facile).

c) 1 est racine évidente de P. On cherche à mettre P sous la forme

$$P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c).$$

On doit avoir

$$2x^3-3x^2+1 = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c = ax^2+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 2 & = a \\ -3 & = b-a \\ 0 & = c-b \\ 1 = -c \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} a & = 2 \\ b & = -3+a = -1 \\ 0 & = c-b = -1-(-1) = 0 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Ainsi

$$P(x) = (x-1)(2x^2-x-1).$$

Le trinôme du second degré $2x^2-x-1$ a pour discriminant $\Delta = 1+4\times 2 = 9 > 0$. Le trinôme a donc deux racines

$$r_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \text{ et } r_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2}.$$

Alors $(2x^2-x-1) = a(x-r_1)(x-r_2) = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$. Dès lors

$$P(x) = 2(x-1)(x-1)(x+\frac{1}{2}) = 2(x-1)^2(x+\frac{1}{2}).$$

d) u est bien dérivable sur I et est de la forme $u(x) = f(x) - x$. Donc $u'(x) = f'(x) - 1$. Calculons $f'(x)$:

$$\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = \frac{1}{3}\left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)^2}\right) = \frac{2\cos(x)^3 + 1}{3\cos(x)^2}.$$

Alors

$$\forall x \in \mathrm{I}, u'(x) = \frac{2\cos(x)^3 + 1}{3\cos(x)^2} - 1 = \frac{-3\cos(x)^2 + 2\cos(x)^3 + 1}{3\cos(x)^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{3\cos(x)^2}.$$

e) $u'(x)$ est du signe de $\mathrm{P}(cos(x))$ donc du signe de $\cos(x) + 1/2$. Sur I, $\cos(x) \geqslant 0$ donc $\cos(x) + 1/2 > 0$. Ainsi u est strictement croissante sur I

f) v est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $v'(x) = 1 - g'(x)$. g est une fonction de la forme g_1/g_2 avec $g_1(x) = 3\sin(x)$ donc $g_1(x) = 3\cos(x)$ et $g_2(x) = 2 + \cos(x)$ donc $g_2'(x) = -\sin(x)$. On a alors $g'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_2'(x)g_1(x)}{g_2(x)^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{I}, g'(x) &= 3\frac{\cos(x)(2 + \cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}\\ &= 3\frac{2\cos(x) + \cos(x)^2 + \sin(x)^2}{(2 + \cos(x))^2}\\ &= 3\frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2} \text{ car } \cos^2 + \sin^2 = 1.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{I}, u'(x) &= 1 - 3\frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}\\ &= \frac{(2 + \cos(x))^2 - 6\cos(x) - 3}{(2 + \cos(x))^2}\\ &= \frac{(4 + 4\cos(x) + \cos(x)^2 - 6\cos(x) - 3}{(2 + \cos(x))^2}\\ &= \frac{\cos(x)^2 - 2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}\\ &= \frac{(\cos(x) - 1)^2}{(2 + \cos(x))^2}.\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu avec $\mathrm{Q}(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

g) Pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$v'(x) = (\cos(x) - 1)^2/(2 + \cos(x))^2 > 0.$$

Donc v est strictement croissante.

h) Comme u est strictement croissante, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > \lim_{x\to 0} u(x)$. Or cette limite vaut 0. Donc pour tout x, $u(x) > 0$, donc $f(x) - x > 0$. Donc $f(x) > x$.
De même, $v(x)$ est strictement supérieur à sa limite en 0, donc à 0. Donc pour tout x, $v(x) > 0$ soit $x - g(x) > 0$, soit $x > g(x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$g(x) < x < f(x).$$

Partie 2.

a)

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} - 2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

b) Par les formules d'addition,

$$\cos(\pi/12) = \cos(\pi/6-\pi/4) = \cos(\pi/6)\cos(\pi/4)+\sin(\pi/6)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

De même,

$$\sin(\pi/12) = \sin(\pi/6-\pi/4) = \cos(\pi/6)\sin(\pi/4)-\sin(\pi/6)\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Finalement

$$\tan(\pi/2) = \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

en utilisant la quantité conjuguée.

c) On applique l'inégalité avec $x = \frac{\pi}{2}$. On obtient

$$g(\pi/12) < \pi/12 < f(\pi/12)$$

donc

$$\frac{12}{3}(2\sin(\pi/12) + \tan(\pi/2)) < \pi < \times\frac{36\sin(\pi/12)}{2+\cos(\pi/12)}.$$

On remplace les valeurs des fonctions trigonométriques par ce que l'on a obtenu pour obtenir un encadrement.

Partie 3.

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta) = 1 - 2\sin(\theta)^2$$

en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

b) Pour tout entier naturel n,
La formule de la question précédente, avec $\theta = \frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$ donne

$$\cos(\frac{\pi}{3\times 2^n}) = \cos(2\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}})$$

soit

$$b_n = 1 - 2a_{n+1}^2.$$

On obtient

$$a_{n+1}^2 = \frac{1-b_n}{2}.$$

Comme les suite (a_n) et (b_n) sont comprises entre 0 et 1 car l'argument de sinus et cosinus est dans $[0, \pi/2]$ on obtient

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}.$$

Comme $b_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 = 1$, on obtient

$$b_{n+1}^2 = 1 - a_{n+1}^2 = 1 - \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}^2 = \frac{1+b_n}{2}.$$

Comme (b_n) est une suite positive car $\frac{\pi}{3\times 2^n} \in [0, \pi/2]$, on obtient

$$b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.$$

c) A l'aide de la **question 1.h)**, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9\times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

d) Si $v_n - u_n < \epsilon$ alors

$$v_n - \pi = (v_n) - u_n + (u_n - \pi) < u_n - v_n \text{ car } (u_n - \pi) < 0,$$

Ainsi, $v_n - \pi < \epsilon$. Comme $v_n - \pi > 0$, on a la conclusion.
De même,

$$u_n - \pi = u_n - v_n - (\pi - v_n) < u_n - v_n < -\epsilon,$$

donc

$$|u_n - \pi| < \epsilon$$

car $u_n - \pi < 0$.

e)
```python
import numpy as np

def approxPi(epsilon):
    k = 0
    a = np.sqrt(3)/2
    b = 1/2
    while ((2**k)*(2*a+a/b) -  9*(2**k)*a/(2+b))> epsilon : ## c'est la condition v_n - u_n > eps
        a = np.sqrt( (1-b)/2) ## on change les valeurs de a_n et de b_n
        b = np.sqrt( (1+b)/2)
        k = k+1 #incrément
    return((2**k)*(2*a+a/b), k) #on renvoie u_n et n.
```