Université de Bordeaux
L3 Mathématiques Fondamentales, 2020-2021

Equations différentielles et calcul différentiel
Devoir Maison 3

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$.

Exercice 2 (Un modèle en biologie)**.** On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(-c + dx(t)) \\ x(0) = x_0 \geq 0 \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

où les constantes a, b, c, d sont strictement positives. Ce système modélise l'évolution de la population de deux espèces lorsqu'une espèce est prédatrice de l'autre. Dans notre modèle, y est la population de l'espèce prédatrice et x la population de l'espèce proie.

1. Réécrire le problème comme un problème de Cauchy **non linéaire**
$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$
où X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que le problème admet une unique solution maximale.
3. Chercher les solutions constantes de l'équation différentielle.
4. Trouver la solution explicite si $x(0) = 0$. *Indication : elle vérifie* $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 0$.
5. Trouver la solution explicite si $y(0) = 0$.
On suppose maintenant $x_0 > 0$ **et** $y_0 > 0$.
6. Montrer que x et y sont des fonctions strictement positives.
7. On définit l'énergie $H(x, y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$. Soit $h(t) = H(x(t), y(t))$. Montrer que h est constante au cours du temps.
8. En déduire que la solution maximale est bornée. *Indication : montrer que x et y sont nécessairement majorées. On décompose $H(x, y) = f(y) + g(x)$ où $f(y) = by - a\ln(y)$ et $g(x) = dx - c\ln(x)$. On étudiera f et g, et on minorera habilement f et g pour x et y assez grand.*
9. En déduire que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.
On suppose maintenant $x_0 > c/d$ **et** $y_0 = a/b$. **On admet qu'il existe** $T > 0$ **tel que** $y(T) = a/b$ **et** $x(T) > c/d$**.**
10. En utilisant h, montrer que $x(T) = x_0$. *Indication : étudier la fonction g sur un intervalle bien choisi.*
11. Quel est le problème de Cauchy vérifié par $X(t + T)$? Conclure que X est périodique.