

Equations différentielles et calcul différentiel
Supplément 1 - Quelques exercices sur le théorème d'Ascoli

Exercice 1. (Fonctions Hölderiennes.)

Pour $\alpha \in (0, 1)$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on définit

$$[f]_\alpha = \sup_{t,s \in [a,b], t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

et on pose $C^\alpha([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} : [f]_\alpha < \infty\}$ muni de la norme $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$.

1. Montrer que $(C^\alpha([a, b]), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.
2. Montrer que la boule unité fermée de C^α est un compact de $C([a, b])$.
3. Soit $0 < \alpha < \beta < 1$. Montrer que pour tout $f \in C^\beta$ et tout $\eta > 0$,

$$[f]_\alpha \leq \max(2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}, \eta^{\beta-\alpha} [f]_\beta).$$

En déduire que si (f_n) est une suite bornée de C^β qui converge uniformément (i.e. en norme $\|\cdot\|_\infty$) vers $f \in C^\beta$ alors (f_n) converge vers f dans C^α .

4. Montrer que pour $0 \leq \alpha < \beta < 1$, la boule unité de $C^\beta([a, b])$ est compacte dans $C^\alpha([a, b])$. *Remarque : on dit que le plongement $C^\beta([a, b]) \hookrightarrow C^\alpha([a, b])$ est compact.*

Exercice 2. (Un exemple d'opérateur compact.)

Sur $X = C([a, b], \mathbb{R})$ et $k \in C([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$. Sur X on définit l'application

$$T(f) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt, \forall f \in X.$$

1. Montrer que T est une application linéaire continue de X dans X .
2. Rappeler pourquoi la boule unité $B_X(0, 1)$ de X n'est pas compacte.
3. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
4. En déduire que $T(B_X(0, 1))$ est équicontinue.
5. Montrer que $T(B_X(0, 1))$ est d'adhérence compacte.