

4. ÉQUATIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 2

4.1. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

Théorème

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On souhaite résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Ses solutions sont :

1. si $\Delta = 0$, une unique solution réelle $r = \frac{-b}{2a}$,
2. si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

3. si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Preuve Les résultats 1. et 2. sont déjà connus depuis la classe de première. On démontre le cas 3. Soit $P(z) = az^2 + bz + c$. On met P sous *forme canonique*. Comme $a \neq 0$ on écrit

$$\begin{aligned} P(z) &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right). \end{aligned}$$

On reconnaît une identité remarquable. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(z) &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\Delta < 0$, on peut écrire $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$, et donc $\frac{\Delta}{4a^2} = \left[\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right]^2$. Donc,

$$\begin{aligned} P(z) &= a \left(\left[z + \frac{b}{2a} \right]^2 - \left[\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right]^2 \right) \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \\ &= a \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \\ &= a(z - r_1)(z - r_2). \end{aligned}$$

Ainsi $P(z) = 0$ si et seulement si $z = r_1$ ou $z = r_2$.

Remarque — Au passage, on a démontré que si z_1 et z_2 sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation, alors $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 4z + 5 = 0$

Le discriminant de l'équation des $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 16 - 40 = -24 < 0$. Les solutions de l'équation sont donc

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2 \times a} = \frac{4 + i\sqrt{24}}{4} = 1 + i\frac{\sqrt{24}}{4} = 1 + i\sqrt{\frac{3}{2}},$$

et

$$r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2 \times a} = \frac{4 - i\sqrt{24}}{4} = 1 - i\frac{\sqrt{24}}{4} = 1 - i\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exemple — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3 = 0$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 3 = -12$. Dès lors l'équation a deux solutions conjuguées $r_1 = \frac{0 + i\sqrt{12}}{2} = i\sqrt{3}$ et $r_2 = -i\sqrt{3}$.

En fait, dans ce cas là on peut se passer du calcul de Δ car

$$\begin{aligned} z^2 + 3 &= z^2 - (i\sqrt{3})^2 \\ &= (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

4.2. Équations de degré supérieur à 2

Définition | Fonctions polynomiales - polynômes

Soit n un entier naturel et $a_n, \dots, a_1, a_0$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$. On appelle **fonction polynôme de degré n à coefficients réels** la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

L'équation $P(z) = 0$ est appelée **équation polynomiale de degré n** .

Σ

Notation

On appelle n le degré du polynôme (ou de la fonction polynomiale) P et on le note $\deg P$.

Proposition

Pour tout z et α des nombres complexes, alors

$$z^n - \alpha^n = (z - \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} \alpha^k.$$

Preuve

On développe le membre de droite de l'égalité :

$$(z - \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} \alpha^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} \alpha^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} \alpha^{k+1}.$$

Le premier terme vaut

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} \alpha^k &= z^n \alpha^0 + z^{n-1} \alpha^1 + z^{n-2} \alpha^2 + \dots + z \alpha^{n-1} \\ &= z^n + z^{n-1} \alpha + z^{n-2} \alpha^2 + \dots + z^2 \alpha^{n-2} + z \alpha^{n-1}. \end{aligned}$$

Le deuxième vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} \alpha^{k+1} = z^{n-1} \alpha^1 + z^{n-2} \alpha^2 + \dots + z \alpha^{n-1} + \alpha^n.$$

En faisant la différence entre ces deux termes, quasiment tous les termes se simplifient et il ne reste que $z^n - \alpha^n$.

Définition | Racine d'un polynôme

Une solution de l'équation $P(z) = 0$ est appelée **racine du polynôme P** .

Proposition

Soit P une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$ (c'est à dire que α est une racine de P). Alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z).$$

Preuve Le polynôme P s'écrit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ avec $a_n \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$. On rappelle la propriété précédente : pour tout entier naturel non nul k ,

$$z^n - \alpha^n = (z - \alpha) \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} \alpha^j.$$

On a alors

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (z^k - \alpha^k) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (z^k - \alpha^k) \text{ car pour } k=0, a_0(z^k - \alpha^k) = a_0(1 - 1) = 0 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[a_k (z - \alpha) \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} \alpha^j \right] \\ &= (z - \alpha) \sum_{k=1}^n \left[a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} \alpha^j \right]. \end{aligned}$$

On pose

$$Q(z) = \sum_{k=1}^n \left[a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} \alpha^j \right]$$

de telle sorte que

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z).$$

Il nous reste alors à démontrer que $Q(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$. En fait, $Q(z)$ s'écrit

$$Q(z) = \sum_{k=1}^n a_k (z^{k-1} + \alpha z^{k-2} + \dots + \alpha^{k-2} z + \alpha^{k-1})$$

qui est bien une fonction polynomiale. Le terme de degré le plus haut qui y apparaît est $a_n z^{n-1}$, avec $a_n \neq 0$. Donc $\deg Q = n - 1$.

Si on trouve une racine complexe non réelle à un polynôme à coefficient réel, cela nous donne automatiquement une deuxième racine. C'est la proposition suivante.

Proposition

Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine **non-réelle** de P , alors son conjugué $\bar{\alpha}$ aussi.

Preuve Si $P(\alpha) = 0$, alors

$$P(\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k \alpha^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

Donc $P(\bar{\alpha}) = 0$.

Remarque — Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine de P , le résultat reste vrai mais n'apporte rien car on sait déjà que $\bar{\alpha} = \alpha$ est une racine.

Méthode (Factorisation de polynôme)

Factoriser un polynôme, c'est l'écrire comme produit de facteurs de la forme $(z - \alpha)$. Cela revient à trouver les racines de $P = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$. Cela se réalise en plusieurs étapes

1. Trouver une racine "évidente" α polynôme P .
2. Écrire $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ avec $Q(z) = q_{n-1} z^{n-1} + \dots + q_0$. et
3. Développer $(z - \alpha)Q(z)$ et déterminer les coefficients q_k en fonctions de α et des coefficients p_k .
4. Appliquer la même méthode à Q , jusqu'à tomber sur un polynôme dont on connaît toutes les racines (comme par exemple un polynôme du second degré).

Exemple — Étude de $z^3 - 1$

Une racine évidente de $P(z) = z^3 - 1$ est 1. On cherche alors à écrire $P(z) = (z - 1)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $3 - 1 = 2$, soit $Q(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$. En développant $(z - 1)Q(z)$ on obtient

$$\begin{aligned} (z - 1)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c \\ &= az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c. \end{aligned}$$

Ainsi on doit avoir

$$z^3 + 0z^2 + 0z - 1 = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c.$$

Ceci est vrai si et seulement si

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = b - a \\ 0 = c - b \\ -1 = -c \end{cases}$$

Ainsi $a = 1$ et $c = 1$. Le système nous permet facilement de trouver $b = c = 1$. Donc $Q(z) = z^2 + z + 1$ et $P(z) = (z - 1)(z^2 + z + 1)$.

Pour finir, on cherche les racines de $Q(z) = z^2 + z + 1$. Le discriminant de l'équation $Q(z) = 0$ est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc Q admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi

$$Q(z) = \left(z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(z - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et donc

$$P(z) = (z - 1) \left(z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(z - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Remarque — Dans le cas des polynômes $P(z) = p_3z^3 + p_2z^2 + p_1z + p_0$ de degré 3, il est facile de trouver a et c dans la factorisation $P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$. En effet, en développant, le seul terme de degré 3 sera $z \times a$ et le seul terme constant sera $-\alpha c$. Ainsi nécessairement $a = p_3$ et $c = -\frac{p_0}{\alpha}$.

Théorème

Soit P une fonction polynomiale de degré n , alors P admet au maximum n racines dans $\mathbb{C}$.

Preuve On raisonne par récurrence pour prouver la proposition $\mathcal{P}(n)$ "toute fonction polynomiale de degré n admet au maximum n racines".

Initialisation. Un polynôme de degré 0 est une fonction constante non nulle. Elle a donc exactement 0 racine, donc a fortiori au plus 0 racine. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$. Soit P un polynôme de degré $n + 1$ arbitraire, montrons qu'il admet au plus $n + 1$ racines. On traite deux cas. Le premier est le suivant : si P n'a pas de racine, alors il a 0 racine et $0 \leq n + 1$ donc la propriété est vérifiée. Le deuxième est le suivant : on suppose que P possède au moins une racine α . Alors $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ avec $\deg Q = n$. D'après l'hypothèse de récurrence au rang n , Q a au maximum n racines. Comme $P(z) = 0$ si et seulement si $z - \alpha = 0$ ou $Q(z) = 0$, P a au maximum $n + 1$ racines (celles de Q auxquelles on rajoute éventuellement α). Ainsi $\mathcal{P}(n + 1)$ est vrai.

Conclusion. Ainsi la propriété est vraie au rang 0 et pour tout n , si elle est vraie au rang n alors elle l'est au rang $n + 1$. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque — Le théorème (plus difficile) de d'Alembert-Gauss assure que tout polynôme admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. En combinant ce résultat et le théorème précédent, on peut démontrer par récurrence que tout polynôme de degré n à coefficients réels se factorise

$$P(z) = a_n(z - r_1)^{m_1}(z - r_2)^{m_2} \dots (z - r_k)^{m_k}$$

où les r_i sont les complexes qui sont racines de P et les m_i sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\sum_{i=1}^k m_i = n$.

Définition | Multiplicité d'une racine

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P ($P(\alpha) = 0$). On appelle **multiplicité de la racine** α le plus grand entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe un autre polynôme Q tel que

$$P(z) = (z - \alpha)^k Q(z).$$

Remarque — La multiplicité d'une racine est toujours comprise entre 1 et $\deg P$.

Remarque — Dans la factorisation

$$P(z) = a_n(z - r_1)^{m_1}(z - r_2)^{m_2} \dots (z - r_k)^{m_k},$$

on peut lire la multiplicité d'une racine r_i : c'est l'entier m_i .

Proposition | Formules de Viète

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients réels (avec $a_n \neq 0$). Alors

- la somme de toutes les racines (avec multiplicité : c'est à dire que si α est une racine de multiplicité m , on la compte m fois dans la somme) est égale à $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$,
- le produit de toutes les racines (avec multiplicité) est égale à $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Remarque — Dans le cas d'un polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ (avec $a \neq 0$) de degré 2 de racines r_1 et r_2 , cette proposition se réécrit

$$P(z) = a(z - r_1)(z - r_2) = a(z^2 - Sz + P)$$

où $S = r_1 + r_2$ est la somme des racines et $P = r_1 r_2$ leur produit. Ainsi $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exemple — Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant $z_1 z_2 = 2$ et $z_1 + z_2 = -2$.

Considérons le polynôme du second degré

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + (z_1 z_2) = z^2 + 2z + 2.$$

Ses racines sont les complexes z_1 et z_2 recherchés. Il ne nous reste qu'à résoudre l'équation polynomiale. Son discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$. Les racines sont alors

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

et

$$z_2 = \overline{z_1} = -1 - i.$$

4.3. Complément : racine carrée d'un nombre complexe

Définition | Racine carrée d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on dit que w est une **racine carrée** de z si $w^2 = z$.

Exemple —

1. Si x est un réel positif, ses racines carrées complexes sont $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$,
2. Si x est un réel négatif, ses racines carrées complexes sont $i\sqrt{-x}$ et $-i\sqrt{-x}$,
3. Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées. Seul 0 admet une unique racine carrée complexe, lui même.

Méthode (Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe)

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On cherche une racine carrée ω de z sous la forme $\omega = x + iy$. Comme $\omega^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$, on obtient $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$. Mais on a aussi $\omega \overline{\omega} = x^2 + y^2$. Cependant

$$\begin{aligned} (\omega \overline{\omega})^2 &= \omega^2 \overline{\omega}^2 \\ &= z \overline{z} = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$$



donc

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a donc le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

En additionnant les lignes 1 et 3, on peut trouver x^2 facilement. On a deux choix opposés pour x mais ce n'est pas grave car on cherche deux complexes opposés. Ensuite, on utilise la ligne 2 ou on réutilise la ligne 1 ou 3 pour trouver y .

Exemple — Trouver les racines carrées de i

On cherche un nombre complexe $\omega = x + iy$ vérifiant $\omega^2 = 0 + i$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1. \end{cases}$$

En additionnant les lignes 1 et 3 on obtient

$$x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 1$$

donc

$$2x^2 = 1.$$

On peut prendre

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La ligne 2 donne

$$y = \frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Une racine carrée de i est donc donnée par

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La deuxième racine carrée de i est donnée par $\omega' = -\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple — Trouver les racines carrées de $1 + i$

On cherche un nombre complexe $\omega = x + iy$ vérifiant $\omega^2 = 1 + i$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

En additionnant les lignes 1 et 3 on obtient

$$x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = \sqrt{2}$$

donc

$$2x^2 = 1 + \sqrt{2}.$$

On peut prendre

$$x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

La ligne 2 donne

$$y = \frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{2}}}{\sqrt{1 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{2}}}{3\sqrt{2}}.$$

Une racine carrée de $1 + i$ est donc donnée par

$$\omega = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{1 - \sqrt{2}}}{3\sqrt{2}}.$$

La deuxième racine carrée de $1 + i$ est donnée par $\omega' = -\omega$.

Théorème

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ un polynôme du second degré à coefficients a, b et c complexes (avec $a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme. Soit δ une racine carrée du nombre complexe Δ , alors les racines de P sont données par les formules

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

et

$$z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

.

Remarque — Si $\Delta = 0$, l'unique racine carrée de Δ est $\delta = 0$. On retrouve alors une unique racine double $z_1 = z_2$.

Remarque — On retrouve les formules connues dans le cas des fonctions polynomiales réelles :

1. si $\Delta \geq 0$, on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$,
2. si $\Delta < 0$, on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$.