

Devoir surveillé

Nombres complexes, point de vue algébrique

Exercice 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique

1. $z = (1 - i)(1 + 3i)$,
2. $\omega = (1 - i)^4$,
3. $\phi = \frac{1+2i}{3-2i}$.

Exercice 2. 1. Calculer $z_0 = 1 + i + i^2 + i^3$,

2. Calculer $z_1 = i + i^2 + i^3 + i^4$,

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le complexe $z_n = i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ vérifie $z_n = 0$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$2z - 12 = -\frac{20}{z}.$$

Exercice 4. Soit P la polynôme défini par

$$P(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (5 + 4i)z - 5i.$$

1. Montrer que i est une racine de P ,
2. Trouver des réels a, b et c tels que $P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$,
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 5 (Une suite récurrente linéaire d'ordre 2). .

Dans cet exercice, on cherche à étudier les suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \tag{E}$$

et dont les premiers termes u_0 et u_1 sont réels.

1. Résoudre l'équation $z^2 = z + 1$. On note z_1 et z_2 ses deux solutions.
2. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la suite $v_n = a(z_1)^n + b(z_2)^n$ vérifie la relation (E).
3. On admet que toutes les suites qui vérifient (E) sont de la forme

$$u_n = a(z_1)^n + b(z_2)^n$$

avec a et b des nombres réels. Déterminer a et b en fonction de u_0 et u_1 .

4. En déduire l'expression de la suite u_n .
5. Exprimer u_n sous forme algébrique.

Si on prend pour valeurs initiales $u_0 = u_1 = 1$, alors la suite s'appelle **la suite de Fibonacci**. C'est un des premiers modèles mathématiques de biologie. Il décrit l'évolution d'une population de lapins en absence de prédateurs.

6. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 .

Barème

Le barème total est sur 23 points car le sujet est long. On prend la note sur 20.

- Exercice 1 : 3 pts (1+1+1),
- Exercice 2 : 4 pts (1+1+2),
- Exercice 3 : 3 pts (1 point pour remettre sous forme de polynôme puis 2 points pour la résolution),
- Exercice 4 : 5 pts (1+2+2),
- Exercice 5 : 8 pts (1+2+1+1+2+1).