Lycée Marie Curie
Mathématiques spécialité TG 06/10

Devoir surveillé

Primitives et équations différentielles

Exercice 1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 2x - 3e^x$.
2. g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{8x+4}{x^2+x}$.
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^5}{\sqrt{x^6+10}}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in]2, +\infty[$,
$$f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}.$$
2. Donner toutes les primitives de f.
3. Déterminer F l'unique primitive de f telle que $F(3) = 0$.

Exercice 3. On étudie l'équation différentielle

$$y' + 3y = 2x - 1. \qquad (E_1)$$

1. Trouver des réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ est solution de (E_1).
2. Donner toutes les solutions de (E_1).
3. Trouver l'unique solution g de (E_1) qui vérifie $g(2) = 0$.

Exercice 4 (Équation de la chaleur)**.** Les lois de la thermodynamiques assurent que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre ce corps et le milieu ambiant. C'est à dire que si y est la fonction qui au temps t (exprimé en minutes) associe la température du corps on a

$$y'(t) = -r(y(t) - T). \tag{C}$$

La réel $r > 0$ (exprimé en degrés par minute) est appelé le coefficient de refroidissement et T est la température ambiante (exprimée en degrés celsius).

1. Montrer que l'équation se réécrit sous la forme

   $$y' = ay + b$$

   en exprimant a et b en fonction de r et T.

2. Montrer que les solutions de l'équation sont les fonctions

   $$y(t) = ke^{-rt} + T$$

   où k est une constante réelle.

3. Calculer la limite

   $$\lim_{t\to+\infty} y(t).$$

   Interpréter.

   Le remplaçant de mathématiques sort un poulet du four à 190 degrés celsius et le laisse refroidir dans une pièce à $T = 25$ degrés celsius.

4. Donner l'expression de la fonction $c(t)$ où c est la température du poulet en fonction du temps de refroidissement. *Indication : la valeur de* $c(0)$ *est donnée dans l'énoncé.*

5. Le remplaçant a laissé refroidir le poulet 10 minutes et le mange à 40 degrés. En déduire la valeur du coefficient r.

Barème

— Exercice 1 : 4 pts (1+1,5+1,5)
— Exercice 2 : 5 pts (2+2+1)
— Exercice 3 : 5 pts (2+2+1)
— Exercice 4 : 6 pts (1+1,5+1+1+1,5).