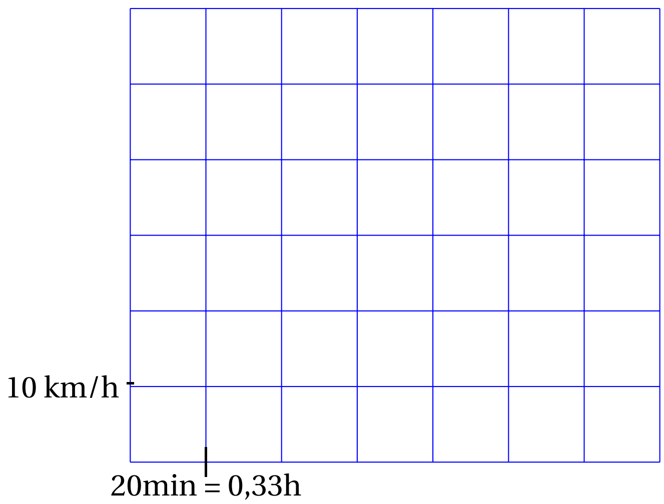
Calcul intégral

1. ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE

Thomas roule pendant deux heures pour aller acheter du chocolat, avec une voiture de location. Pour remettre la bonne quantité d'essence avant de rendre la voiture, il a besoin de savoir quelle distance il a parcourue. Pour estimer la distance parcourue, il a noté sa vitesse toutes les dix vingt minutes.

14h00	50 km/h
14h20	40 km/h
14h40	30 km/h
15h00	50 km/h
15h20	40 km/h
15h40	20 km/h

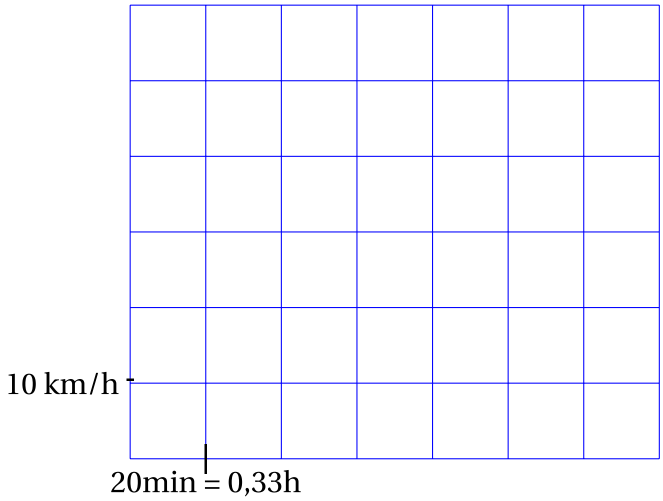
1. Placer les mesures de vitesse sur un graphique
2. Si on suppose les vitesses constantes entre deux mesures, quelle est la distance parcourue ? La représenter comme une aire sur le graphique.



Pour être plus précis, Thomas décide de prendre plus de mesures : il prend maintenant des mesures de vitesses toutes les dix minutes.

14h00	50 km/h	14h10	45 km/h
14h20	40 km/h	14h30	35 km/h
14h40	30 km/h	14h50	40 km/h
15h00	50 km/h	15h10	50 km/h
15h20	40 km/h	15h30	35 km/h
15h40	20 km/h	15h50	40 km/h

3. Placer les mesures de vitesse sur un graphique.
4. Quel peut être l'allure de la vitesse en fonction du temps ? La tracer.
5. Quelle aire donne l'impression d'approximer le calcul de la vitesse par approximation ?



On parle de **Méthode des Rectangles** pour l'approximation d'aire sous une courbe : on approxime l'aire par la somme d'aires de rectangles construits à partir de points de la courbe. Plus on prend des rectangles fins, plus l'approximation est bonne. Ici, on a pris des rectangles à droite de la courbe, mais on aurait aussi pu prendre des rectangles à gauche en prenant la mesure de 16h et pas celle de de 14h. Il est aussi possible de prendre le point milieu comme hauteur d'un rectangle.

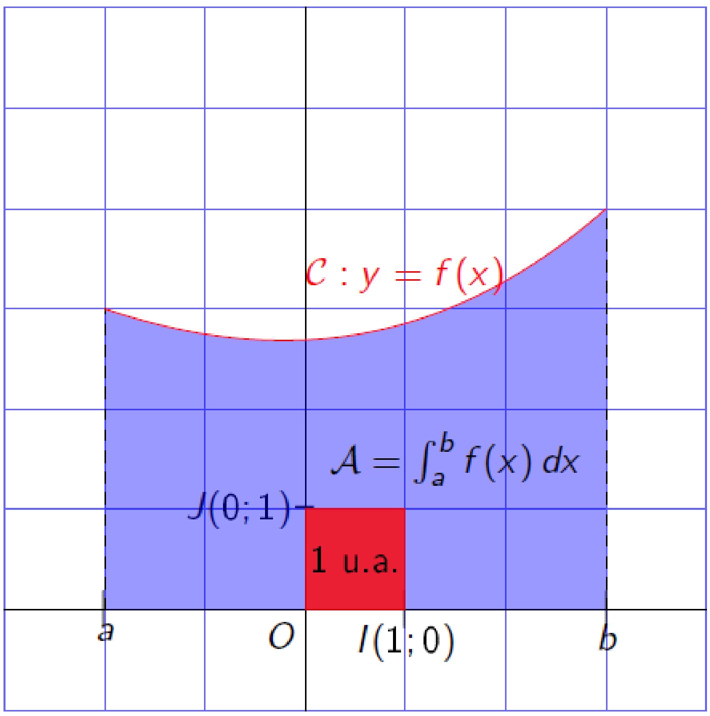
2. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE SUR UN INTERVALLE

Dans cette partie, f est une fonction à valeurs positives continue sur l'intervalle $[a, b]$. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}(1;0), \mathrm{J}(0;1))$.

2.1. Aire sous la courbe représentative de la fonction f

Définition

- **L'unité d'aire**, notée u.a. est l'aire du rectangle OIJK où $\mathrm{K}(1;1)$.
- **Le domaine situé sous la courbe** $\mathscr{C}$ est la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
- **L'intégrale de la fonction f entre a et b** est l'aire $\mathscr{A}$ du domaine situé sous la courbe représentative de f, $\mathscr{C}$, dans un repère orthogonal. Elle s'exprime en u.a. et on la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque — La variable d'intégration est dite **muette**, exactement comme les indices de sommation. Ainsi on pourra noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)du.$$

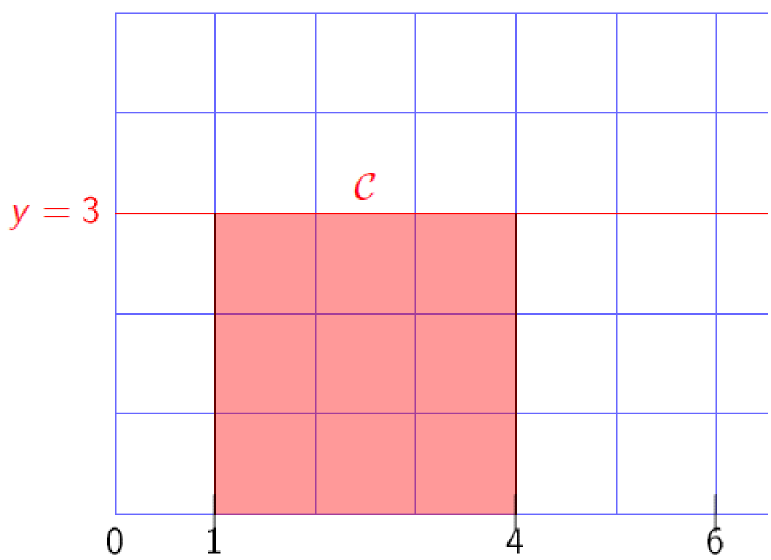
Remarque — On a une **relation de Chasles** : si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $m \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^m f(x)\,\mathrm{d}x + \int_m^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque — Si $b = a$, on regarde "l'aire d'un segment", ainsi

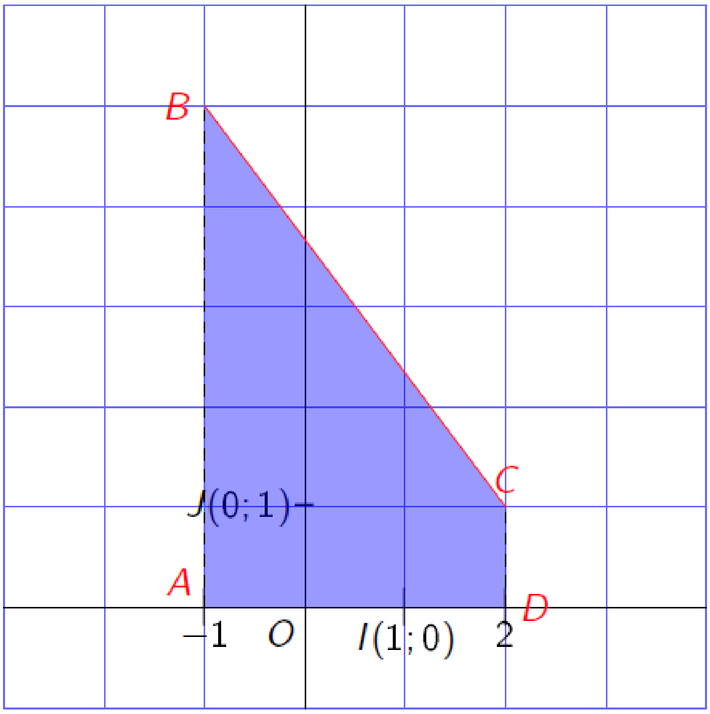
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exemple — ***Calcul de*** $\int_1^4 3\,\mathrm{d}x$ On se ramène au calcul de l'aire d'une figure connue.



L'aire à déterminer est l'aire sous la courbe d'équation $y = 3$. C'est l'aire du domaine délimité par les droites horizontales d'équations $y = 0$ et $y = 3$, et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 4$. On calcule alors l'aire d'un carré de coté de longueur 3. Son aire est donc $3^2 = 9$ unités d'aire.

Exemple — *Calcul* $\int_{-1}^{2} \frac{-4x+11}{3}\,\mathrm{d}x$

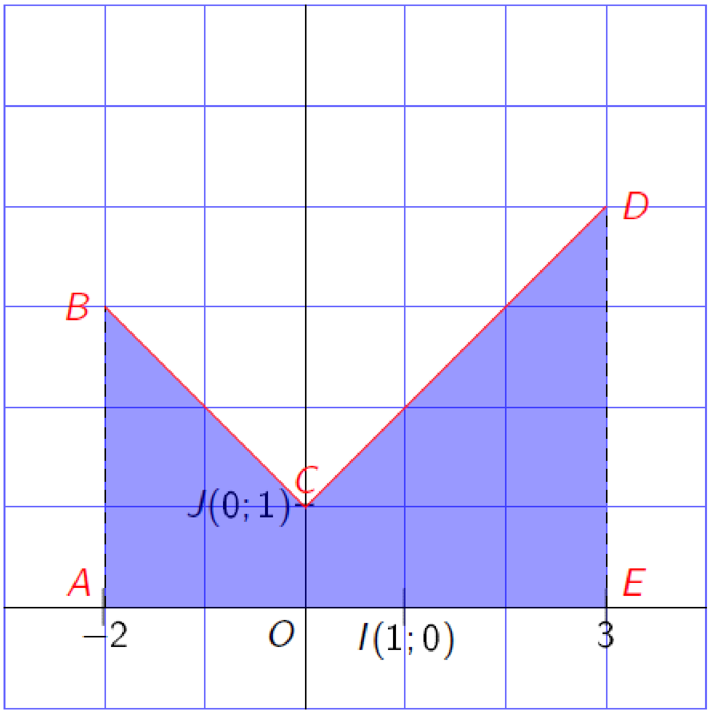


L'aire à déterminer et l'aire du domaine encadré par la droite d'équation $y = \frac{-4x+11}{3}$ et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 2$. Traçons la droite oblique : pour $x = -1$, on obtient $y = 5$ et pour $x = 2$ on obtient $y = 1$. L'aire à calculer est celle du trapèze ABCD de sommets A$(-1;0)$, B$(-1;5)$, C$(2;1)$ et D$(2;0)$. L'aire du trapèze est donnée par $\mathscr{A}(\text{ABCD}) = \frac{b_1+b_2}{h}$ où b_1 et b_2 sont respectivement les longueurs des petites et grandes bases, et où h est la hauteur du trapèze. Ici

$$\int_{-1}^{2} \frac{-4x+11}{3}\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}(\text{ABCD}) = \frac{5+1}{3} = 2.$$

Exemple — ***Fonction définie par morceaux*** On souhaite calculer l'aire sous la courbe de la fonction définie sur l'intervalle $[-2,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x+1 \text{ si } 0 < x \leqslant 3 \end{cases}.$$



2.2. Expression d'une primitive à partir d'une intégrale

Théorème

La fonction $\mathrm{F}_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$ telle que $\mathrm{F}_a(a) = 0$.

Preuve **Démonstration exigible dans le cas où f est croissante.** Toutes les primitives de f diffèrent d'une constante réelle k. Il existe donc une unique primitive de f qui s'annule en a. De plus, $\mathrm{F}_a(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Il nous reste donc uniquement à démontrer que F_a est bien une primitive de f, c'est à dire que $(\mathrm{F}_a)' = f$. Pour cela, revenons à la limité du nombre dérivé. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{F}_a(x+h)-\mathrm{F}_a(x)}{h} = 0$. On fixe $x \in [a,b]$.

Cas 1 : si $h > 0$. La relation de Chasles donne

$$\mathrm{F}_a(x+h) - \mathrm{F}_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est croissante, pour tout $t \in [x, x+h]$, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$. L'aire sous la courbe de f est alors encadrée par l'aire du rectangle de longueur h et de largeur $f(x)$ et celle du rectangle de longueur h et de largeur $f(x+h)$. Ainsi,

$$hf(x) \leqslant \mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) \leqslant hf(x+h).$$

Donc

$$f(x) \leqslant \frac{\mathrm{F}_a(x+h) - \mathrm{F}_a(x)}{h} \leqslant f(x+h).$$

Comme f est continue, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Donc, par théorème des gendarmes, $\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathrm{F}_a(x+h)-\mathrm{F}_a(x)}{h} = 0$.

Cas 2 : si $h < 0$. On fait de même en encadrant $hf(x+h) \leqslant \mathrm{F}_a(x+h) - \mathrm{F}_a(x) \leqslant hf(x)$.

Ainsi pour tout x,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{F}_a(x+h) - \mathrm{F}_a(x)}{h} = 0.$$

Donc F_a est dérivable en x et $(\mathrm{F}_a)'(x) = f(x)$.

Théorème

Pour toute primitive F de f sur $[a, b]$ on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Preuve Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. On sait que toutes les primitives de f diffèrent d'une constante. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_a(x) + k$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) &= (\mathrm{F}_a(b) + k) - (\mathrm{F}_a(a) + k) \\
&= \mathrm{F}_a(b) + k - \mathrm{F}_a(a) - k \\
&= \mathrm{F}_a(b) - \mathrm{F}_a(a) \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ car } \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Remarque — Cette formule est **la principale façon de calculer des intégrales**.

Exemple — *Calcul de* $\int_0^5 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$

Une primitive de la fonction f qui à x associe $f(x) = x^2+1$ est $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$. Alors

$$\int_0^5 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^5 = \frac{5^3}{3}+5-\left(\frac{0^3}{3}+0\right) = \frac{125}{3}+5 = \frac{140}{3}.$$

3. INTÉGRALE D'UNE FONCTION DE SIGNE QUELCONQUE

Dans cette partie, f est une fonction à valeurs positives continue sur l'intervalle I.

3.1. Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Pour définir l'intégrale d'une fonction qui n'est pas forcément positive, on ne peut pas utiliser la notion d'aire. Pour cela, on utilise le lien avec les primitives découvert dans la partie précédente.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour a et b deux nombres réels appartenant à I, **l'intégrale de f entre a et b** est le nombre réel **F(b) - F(a)**, où F est une primitive de f sur I. On le notera

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition

Le nombre ainsi défini ne dépend pas du choix de la primitive choisie.

Notation

On écrit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = [\mathrm{F}(x)]_a^b.$$

Proposition

Pour tous réels a et b de I,

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve Si F est une primitive de f sur I, alors

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(b)\\ &= -(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(b))\\ &= -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3.2. Lien aire - intégrales

On remarque que si f est une fonction négative, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $-f$ est une fonction positive, la quantité $\int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe représentative de $-f$. Or cette aire est la même que l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses. Ainsi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire délimitée par la courbe de f et l'axe des abscisses, on parle d'**aire algébrique** sous la courbe.

Proposition

Pour toute fonction continue sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique sous la courbe représentative de f. Autrement dit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}^+ - \mathscr{A}^-,$$

où $\mathscr{A}^+$ est l'aire du domaine délimité par la partie positive le courbe de la fonction alors que $\mathscr{A}^-$ est l'aire du domaine délimité par la partie négative de la courbe de la fonction.

4. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.

4.1. Propriétés algébriques

Proposition | Linéarité de l'intégrale

1.
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Pour tout réel λ,
$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve On démontre 1. Si F et G sont des primitives de f et g sur $[a,b]$, alors on sait que $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une primitive de $f+g$ sur $[a,b]$. Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x &= [\mathrm{F}+\mathrm{G}]_a^b \\ &= (\mathrm{F}+\mathrm{G})(b) - (\mathrm{F}+\mathrm{G})(a) \\ &= \mathrm{F}(b)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{F}(a)-\mathrm{G}(a) \\ &= \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On retrouve une propriété que l'on avait remarquée sur les intégrales de fonctions à valeurs positives, la relation de Chasles.

Proposition | Relation de Chasles

Pour tout réels c, d, e de l'intervalle $[a,b]$,

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{F}(d)-\mathrm{F}(c)+\mathrm{F}(e)-\mathrm{F}(d) \\ &= \mathrm{F}(e)-\mathrm{F}(c) = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Exemple — *Intégrale d'une fonction définie par morceaux*

Soit f la fonction définie sur $[-1;5]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [-1;2] \\ \frac{x^2}{2} \text{ si } x \in]2,5]. \end{cases}$$

La fonction f est bien continue car $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{2} = 2 = f(2)$. On peut donc calculer son intégrale $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$. La relation de Chasles donne

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{2} 2\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= (2-(-1))2 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_2^5\\ &= 6 + \frac{125}{6} - \frac{8}{6} = \frac{153}{6}.\end{aligned}$$

4.2. Intégrales et inégalités

Le lien aire-intégrales permet d'établir la propriété suivante, appelée **positivité de l'intégrale**.

Proposition | Positivité de l'intégrale

- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

On en déduit la théorème suivant.

Théorème | Croissance de l'intégrale

Si pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve Si pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leqslant 0$. Par positivité de l'intégrale $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$, et par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple — *En comparant* 0, $e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *et* e^{-x^2}*, encadrer* $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant x$, donc $0 \geqslant -x^2 \geqslant -x$. Par croissance de la fonction exponentielle, on a

$$1 \geqslant e^{-x^2} \geqslant e^{-x}.$$

La croissance de l'intégrale implique que

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Le calcul des intégrales donne $1 \geqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant [-e^{-x}]_0^1$ soit

$$1 \geqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant e-1.$$

4.3. Valeur moyenne d'une fonction

Définition

La **valeur moyenne d'une fonction** sur l'intervalle $[a, b]$ est la quantité

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque — Interprétation graphique Si f est une fonction positive, alors l'intégrale de f entre a et b est la même que l'aire du rectangle de longueur $(b-a)$ et de largeur μ :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

5. INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème | Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose que leurs dérivées sont continues sur I. Alors pour tout a et b des réels de I,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve On calcule $\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x$ de deux façons différentes. Comme uv est une primitive de $(uv)'$, on a d'abord

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

D'autre part, la formule de dérivation du produit de deux fonctions donne

$$\begin{aligned}\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \big(u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b,$$

ce qui donne la formule à démontrer.

Remarque — On parle d'intégration par partie**S** car il y a **plusieurs parties**.

La formule d'intégrations par parties sert à la fois à calculer des intégrales et des primitives de fonctions. Terminons ce cours par des exemples de calcul.

Exemple — ***Calcul d'une intégrale par intégration par parties***

On souhaite calculer

$$\int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x.$$

On ne connait pas de primitive de cette fonctions ! Il faut choisir quelles seront les fonctions u et v pour appliquer la formule. Prenons $u(x) = x$. Dans la formule, la quantité sous l'intégrale est $u(x)v'(x)$, donc nécessairement $v'(x) = e^x$. Ainsi $u'(x) = 1$ et on peut prendre $v(x) = e^x$ (on peut prendre n'importe quelle primitive, autant prendre la plus simple !). Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,2]$ et leurs dérivées sont continues. La formule d'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [xe^x]_0^2 - \int_0^2 1\times e^x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties nous a ramené à une intégrale plus facile à calculer. On obtient

$$\begin{aligned}[xe^x]_0^2 - \int_0^2 1\times e^x\,\mathrm{d}x &= 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2e^2 - [e^x]_0^2 \\ &= 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.\end{aligned}$$

Exemple — *Un exemple de rédaction : calcul de $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{x} u\sin(u)\,\mathrm{d}u$*

On calcule l'intégrale par intégration par parties. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$. On a alors $u'(x) = 1$ et on peut prendre $v(x) = -\cos(x)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, \pi]$ et leurs dérivées sont continues. Donc, par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-x\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^{\pi} + [\sin(x)]_0^{\pi} \\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\times\cos(0) + \sin(\pi) - \sin(0) = -\pi\times(-1) + 0 + 0 - 0 = \pi.\end{aligned}$$

Méthode ***(Déterminer une primitive par intégration par parties)***

Comme vu précédemment dans le cours, si f est une fonction continue sur I et si $a \in \mathrm{I}$, alors

$$\mathrm{F}_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f s'annulant en a. La formule d'intégration par parties nous permet alors de calculer des primitives de fonctions plus compliquées. Si on reprend l'exemple de f définie par $f(x) = x\sin(x)$, une primitive de f est par exemple donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_0(x) &= \int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [-t\cos(t)]_0^x - \int_0^x -\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -x\cos(x) + 0\cos(0) - \int_0^x -\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -x\cos(x) + [\sin(t)]_0^x \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) - 0 \\ &= -x\cos(x) + \sin(x).\end{aligned}$$

Remarque — Le plus difficile, dans l'intégration par parties, est de déterminer les fonctions u et v'. Voici quelques petites remarques pour vous aider à faire ce choix

1. $v'(x)$ est toujours une fonction dont on connait une primitive : la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques joueront donc souvent ce rôle.

2. $u(x)$ est une fonction qui "devient plus simple si on la dérive" : les polynômes peuvent jouer ce rôle car leur degré baisse quand on les dérive. La fonction ln devient aussi plus simple quand on la dérive car $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

EXERCICES DU CHAPITRE

Intégrale d'une fonction continue et positive

Exercice 1 Exercice 25 page 411.

Exercice 2 Exercice 28 page 411.

Exercice 3 Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Exercice 4 Soit f une fonction continue impaire sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$$

.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $[0,6]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ si } x \in [0,2] \\ x^2+1 \text{ si } x \in [2,4] \\ 21-x \text{ si } x \in [4,6]. \end{cases}$$

Calculer $\int_0^6 f(t)dt$.

Exercice 6 Exercice 3 page 403.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes

$$\text{a) } \int_{-2}^{1} \left(xe^{x^2}+2x-1\right)dx \quad \text{b) } \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\ln(x)}{x}dx \quad \text{c) } \int_{2}^{7} \frac{-4}{(u+2)^2}du.$$

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes

$$\text{a) } \int_{2}^{4} \frac{s}{\sqrt{s^2-1}}ds \quad \text{b) } \int_{-2}^{1} e^{3x}dx \quad \text{c) } \int_{2}^{3} (2u+1)(u^2+u)^3du.$$

Propriétés des intégrales

Exercice 9 On poste $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ et $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

1. Calculer I_1 à l'aide d'une primitive.
2. Calculer $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$.
3. En déduire la valeur de I_2.

Exercice 10 Sans calcul, donner le signe des intégrales suivantes.

$$\text{a) } \int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx \quad \text{b) } \int_{-2}^{0} x(x^2+1)\,dx \quad \text{c) } \int_{0}^{1} (x^2-x^3)\,dx.$$

Exercice 11 Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$$

En déduire un encadrement de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 12 Exercice 65 page 414.

Intégration par parties

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties.

$$\text{a) } \int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{b) } \int_{-1}^{2} (3t+1)e^t\,dt \quad \text{c) } \int_1^{e^2} (2x)\ln(x)\,dx.$$

Exercice 14 En réalisant une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$, déterminer une primitive de la fonction logarithme.

Exercice 15 On définit

$$\mathrm{A} = \int_0^x \cos(t)e^t\,dt \text{ et } \mathrm{B} = \int_0^x \sin(t)e^t\,dt.$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A en fonction de B.
2. A l'aide d'une seconde intégration par parties, déterminer les primitives de f : $x \mapsto \cos(x)$.

Exercice 16 On souhaite calculer l'intégrale $\mathrm{J} = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$.

1. A l'aide l'une intégration par parties, exprimer J en fonction de $\mathrm{I} = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$.
2. Calculer J à l'aide d'une seconde intégration par parties.
3. En déduire I.

Exercices d'entrainement et d'approfondissement

Exercice 17 On définit une suite réelle $(u_n)_n$ par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

.

1. Montrer que la suite u_n est croissante et minorée.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que u_n converge vers 0.

Exercice 18

1. Montrer que pour tout réel t,

$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$

2. En déduire un encadrement de

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Exercice 19 Pour tout entier n on définit l'intégrale de Wallis

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n\,dx.$$

1. Calculer I_1 et I_2.
2. Soit $n \geqslant 2$. On écrit $\sin(x)^n = u(x)v'(x)$ avec $u(x) = \sin(x)^{n-1}$ et $v'(x) = \sin(x)$. A l'aide d'une intégration par parties et de la relation $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, montrer que $\mathrm{I}_n = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$.
3. Exprimer I_n en fonction de I_{n-2}.