

CHAPITRE 1

Rappels de terminale. Premiers calculs.

1. MÉTHODES DE CALCUL

1.1. Fractions

Théorème 1

Tout nombre rationnel s'écrit d'une façon unique $\frac{p}{q}$ avec des entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ non nuls qui sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils ont 1 pour unique diviseur commun).



Méthode (Règles de calcul)

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
2. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
4. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ (avec $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$).

Remarque 1.1 — On prend l'habitude de toujours simplifier les fractions : on cherche à les représenter sous forme d'une fraction irréductible. Par exemple, on n'écrira jamais $\frac{5}{20}$ dans le résultat d'un calcul mais $\frac{1}{4}$.



Attention

Il ne faut jamais écrire $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Exemple 1 — Calculer :

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{4}, \quad \frac{11}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}, \quad \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \div \frac{3}{2}.$$

1.2. Puissances (entières)

Définition 1 | Puissances d'un nombre réel

Si x est un réel et n un entier positif, on définit x^n comme le produit de n facteurs x :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}.$$

Par convention $x^0 = 1$.

Si $x \neq 0$, on peut aussi définir x^n pour n un entier négatif par

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}.$$



Méthode (Règles de calcul)

Soient x, y des réels et n, p des entiers relatifs. On a les règles de calcul suivantes :

1. $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
2. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
3. $x^{n+p} = x^n \times x^p$
4. $(x^n)^p = x^{np}$
5. $\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$.



Attention

Il ne faut jamais écrire $(x + y)^n = x^n + y^n$.



Attention

Attention à ne pas confondre $(-a)^n$ et $-a^n$. Par exemple :

1. $-1^n = -1$
2. $(-1)^n = 1$ si n est pair et -1 si n est impair
3. pour éviter les erreurs, on peut écrire immédiatement $(-a)^n = (-1)^n a^n$.

Exemple 2 — Calculer :

1. $3^4 \times 6^4$,
2. $\frac{2^8}{2^{-6}}$,
3. $\frac{(x^2 y^3)^{-2}}{(xy^2)^3}$.

Étude des fonctions inverse, carré, et cube. La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $x \mapsto \frac{1}{x} (= x^{-1})$. C'est une fonction impaire.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	

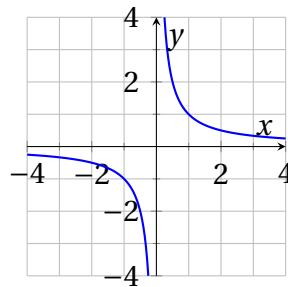


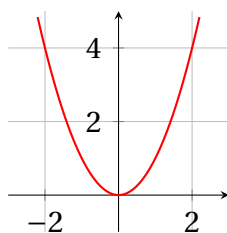
FIG. 1.1. : Fonction inverse

Les fonctions carré et cube sont définies sur $\mathbf{R}$.

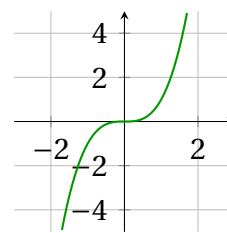
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-\infty \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow +\infty$	

Fonction Carré (x^2)



Fonction Cube (x^3)



La fonction carré est paire. La fonction cube est impaire.

1.3. Racines carrée, cubique

Définition 2 | Racine carrée

Soit $x \in \mathbf{R}_+$ un réel positif, il existe un unique réel positif y tel que $y^2 = x$. On le note $\sqrt{x}$ (ou $x^{1/2}$) et il s'appelle **la racine carrée de x** .

Remarque 1.2 — On ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif.

Remarque 1.3 — On a toujours $(\sqrt{x})^2 = x$ (pour $x \geq 0$), mais pas toujours $\sqrt{x^2} = x$.



Méthode (Règles de calcul)

Pour tous réels positifs $x, y \in \mathbf{R}_+$, on a

- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \sqrt{y}$,
- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ si $y > 0$,
- $(\sqrt{x})^2 = x$.

Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On essaie toujours de simplifier les expressions avec les racines carrées. Par exemple, on ne laissera jamais $\sqrt{4}$ dans un calcul mais on mettra 2. Aussi, dans une écriture fractionnaire, on évite de laisser des racines au dénominateur.



Méthode (Quantité conjuguée)

Quand on a une expression fractionnaire avec une racine carrée au dénominateur comme $3 + \sqrt{2}$, on multiplie par la **quantité conjuguée** $3 - \sqrt{2}$ au numé-



rateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{4}{3 + \sqrt{2}} &= \frac{4}{3 + \sqrt{2}} \frac{3 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{12 - 4\sqrt{2}}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{12 - 4\sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{12 - 4\sqrt{2}}{7}.\end{aligned}$$



Attention

On n'écrit jamais $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exemple 3 — Mettre les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ ou $a\sqrt{b} + c$, sans racine au dénominateur, avec a, b, c des nombres rationnels :

$$\sqrt{108}, \quad 6\sqrt{45}, \quad \frac{12}{\sqrt{56}}, \quad \frac{2}{1 - \sqrt{7}}.$$

Définition 3 | Racine cubique

Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique réel y tel que $y^3 = x$. On note ce réel $\sqrt[3]{x}$ ou $x^{1/3}$ et on l'appelle **racine cubique de x** .



Méthode (Règles de calcul)

Pour tous réels $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

- $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y}$,
- $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$ si $y \neq 0$,
- $(\sqrt[3]{x})^3 = x$,
- $\sqrt[3]{x^3} = x$.

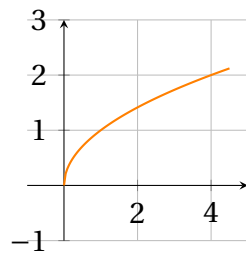
Étude des fonctions racine carrée et cubique. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbf{R}_+$. C'est la fonction qui à un réel positif x associe $\sqrt{x}$. C'est la réciproque de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$.

La fonction racine cubique est définie sur $\mathbf{R}$. C'est la fonction qui à un réel x associe $\sqrt[3]{x}$. C'est la réciproque de la fonction cube.

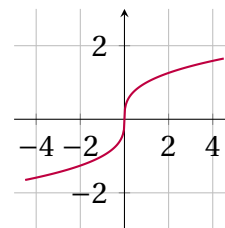
x	0	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	0	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$+\infty$

Racine carrée ($\sqrt{x}$)



Racine cubique ($\sqrt[3]{x}$)



La fonction racine cubique est impaire. La racine carrée ne peut pas être paire ou impaire car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.

2. POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Un trinôme du second degré est une fonction de la forme

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$. Ces fonctions ont été étudiées au lycée et ici on donne un petit résumé de ce qu'il y a à savoir.

2.1. Variations et signe

Théorème 2 | Forme canonique

Un polynôme du second degré se met sous la forme

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du polynôme.

Théorème 3 | Résolution de $f(x) = 0$

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On souhaite résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans $\mathbf{R}$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Ses solutions sont :

1. si $\Delta = 0$, une unique solution réelle $r = \frac{-b}{2a}$;
2. si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ;$$

3. si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

Vocabulaire

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ s'appellent les **racines** du polynôme f .

On connaît les tableaux de variations et de signe des trinômes du second degré.

Théorème 4 | Tableaux de variations

Cas $a < 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$	+	0	-
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$-\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$-\infty$

Cas $a > 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$	-	0	+
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$+\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$+\infty$

Théorème 5 | Tableau de signes

Cas $\Delta > 0$.

x	$-\infty$	$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a

Cas $\Delta = 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

Cas $\Delta < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	signe de a	

Exemple 4 — Faire l'étude complète (forme canonique, racines, variations, signe, extremum) des polynômes suivants :

1. $P(x) = 5x^2 + 4x - 12$,
2. $Q(x) = 4x^2 - 16x + 3$,
3. $R(x) = -x^2 + 6x - 9$.

2.2. Autres remarques

Relations coefficients-racines. Pour trouver plus rapidement les racines d'un polynôme, on peut utiliser les relations coefficients-racines. Dans cette partie on les donne pour des polynômes de degré 2, on fera un peu plus par la suite.

Théorème 6 | Relations coefficients-racines

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré de discriminant strictement positif, avec pour racines r_1 et r_2 , alors la somme et le produit des racines sont donnés par

$$S = r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } P = r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemple 5 — Soient r_1 et r_2 les racines de $x^2 - x - 1$. Sans calculer explicitement r_1 et r_2 , calculer $\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}$.

Factorisation. Dans la suite de l'année, on étudiera des polynômes généraux donc pas forcément de degré 2, et on cherchera leurs racines. Par exemple, prenons le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. On remarque assez rapidement que $P(1) = 0$. On va donc chercher à écrire le polynôme $P(x) = (x-1) \times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2. En fait, on cherche des réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre a, b, c solutions du système

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b - a &= -1 \\ c - b &= 1 \\ -c &= -1 \end{cases}$$

ce qui donne $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$, donc

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 1).$$

Ainsi $P(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

Remarque 2.1 — Cette méthode se généralise à des polynômes de tout degré. Cela sera fait dans un chapitre ultérieur.

Exemple 6 — Trouver les racines du polynôme $P(x) = 2x^3 - 14x + 12$.

3. RAPPELS SUR LES SUITES

On rappelle qu'une suite est une application (u_n) qui à tout entier $n \in \mathbb{N}$ associe un réel u_n .

3.1. Rappel : suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le terme r est appelé la **raison** de la suite.

Théorème 7

Le terme général d'une suite arithmétique est donné par

$$u_n = u_0 + nr$$

où u_0 est le premier terme de la suite et r est sa raison.

Remarque 3.1 — Une suite arithmétique de raison différente de zéro est toujours divergente, soit vers $-\infty$ soit vers $+\infty$ en fonction du signe de la raison.

3.2. Rappel : suites géométriques

Une suite géométrique est une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le facteur q est appelé la **raison** de la suite.

Théorème 8

Le terme général d'une suite géométrique est donné par

$$u_n = u_0 \times q^n$$

où u_0 est le premier terme de la suite et q est sa raison.

3.3. Suites arithmético-géométriques

Définition 4 | Suite arithmético-géométrique

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont des réels. On étudie uniquement les cas où $a \neq 1$ (car alors c'est une suite arithmétique) et $b \neq 0$ (car alors c'est une suite géométrique).

Pour étudier ces suites, on cherche à se ramener à une suite géométrique par l'introduction d'une suite annexe.



Méthode (Étude d'une suite arithmético-géométrique)

1. On cherche un point fixe pour la relation de récurrence, c'est-à-dire un réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$. On obtient la formule $\ell = \frac{b}{1-a}$.
2. On introduit la suite annexe $v_n = u_n - \ell$. Elle vérifie la relation de récurrence

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= a(u_n - \ell) + a\ell + b - \ell \\ &= av_n + a\ell + b - \ell \\ &= av_n \text{ car } \ell = a\ell + b. \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de terme général $v_n = v_0 a^n$.

3. Si $v_n = v_0 a^n$, alors

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \ell \\ &= v_0 a^n + \ell \\ &= (u_0 - \ell) a^n + \ell. \end{aligned}$$

4. Il y a alors plusieurs comportements possibles en fonction de a :
 - convergence vers ℓ si $|a| < 1$,
 - divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ en fonction de $u_0 - \ell$ si $a > 1$,
 - divergence (pas de limite) si $a \leq -1$.

Exemple 7 — Étude de la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

L'équation $\ell = 0,5\ell + 3$ a pour unique solution $\ell = 6$. Soit (v_n) la suite définie par

$v_n = u_n - 6$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,5v_n$. On reconnaît une suite géométrique de raison 0,5. Alors $v_n = v_0 \times 0,5^n = -3 \times 0,5^n$ et $u_n = -3 \times 0,5^n + 6$, d'où u_n converge vers 6.

3.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 5

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite définie par la donnée de ses deux premiers termes et de la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

pour certains réels fixés a et b .

Théorème 9 | Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, résolution

Si (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on peut considérer son polynôme caractéristique

$$P(x) = x^2 - ax - b.$$

Dans deux cas, on peut donner une expression explicite pour u_n . Soit Δ le discriminant de P .

1. Si $\Delta > 0$, u_n est de la forme

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où r_1 et r_2 sont les racines de P et λ, μ sont des réels à déterminer en fonction de u_0 et u_1 .

2. Si $\Delta = 0$, u_n est de la forme

$$u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

où $r = \frac{a}{2}$ est l'unique racine de P et λ, μ sont des réels à déterminer en fonction de u_0 et u_1 .

Exemple 8 — Suite de Fibonacci La suite de Fibonacci (F_n) est définie par ses premiers termes $F_0 = 0, F_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Le polynôme caractéristique de la suite est $x^2 - x - 1$ et ses racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
La suite a pour expression explicite

$$F_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Les conditions sur F_0 et F_1 donnent

$$\begin{cases} F_0 = 0 &= \lambda + \mu \\ F_1 = 1 &= \lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Dès lors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

4. EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Définition 6 | Exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée $\exp$, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$. On note aussi $\exp(x) = e^x$.

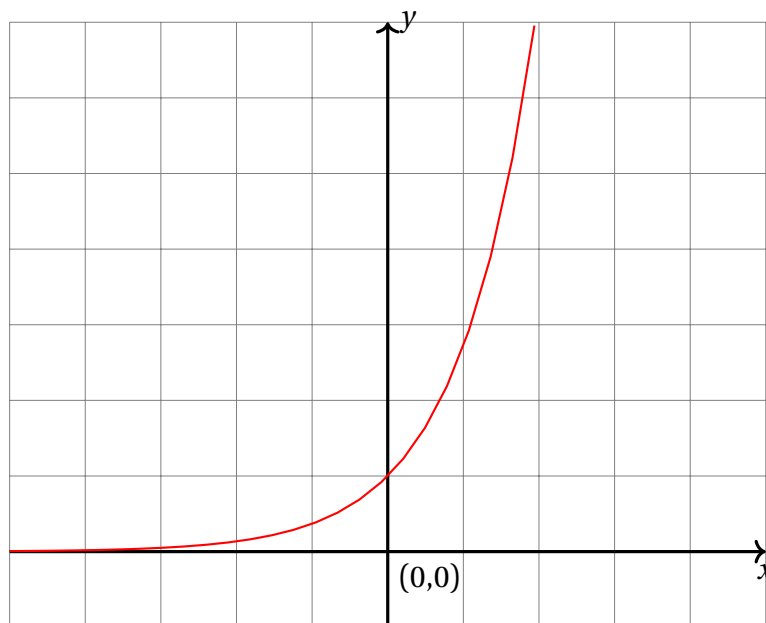
Proposition 1

Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

- $\exp(x) > 0$,
- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$,
- la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

Représentation graphique.



Exemple 9 — Résoudre l'équation

$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0.$$

Définition 7 | Logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, est la bijection réciproque de la fonction exponentielle (elle va donc de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$).

Remarque 4.1 — Le fait que $\exp$ et $\ln$ soient bijections réciproques se traduit par les égalités suivantes :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \exp(\ln(x)) = x$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x.$$

On notera l'importance de la présence de x dans le domaine de la **première fonction à appliquer**.

Remarque 4.2 — Une autre définition de la fonction logarithme est :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Proposition 2

- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(e) = 1$,
- $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

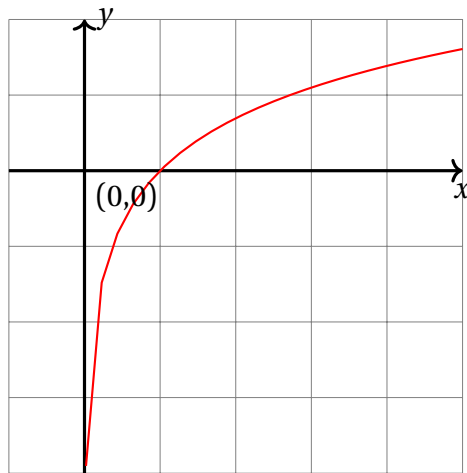
Proposition 3

Le logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	-0	$1 \rightarrow$	$+\infty$

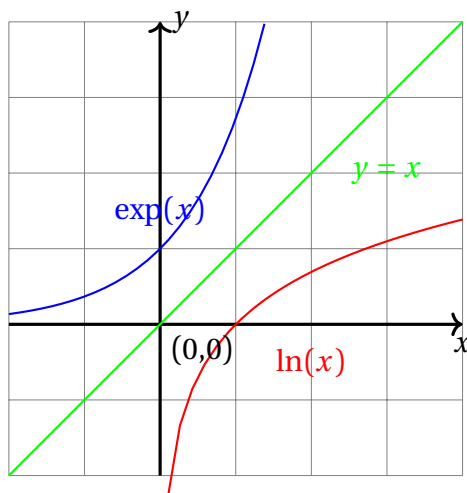
Représentation graphique.



Exemple 10 — Résoudre l'équation

$$2 \ln(x) - \ln(3x) = 12.$$

Remarque 4.3 — Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques l'une de l'autre. Cela implique que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



5. INTRODUCTION AUX FONCTIONS POLYNOMIALES

Généralités Une fonction polynomiale (de degré n) est une fonction de la forme :

$$P : x \in \mathbf{R} \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $a_0, \dots, a_n$ des réels tels que $a_n \neq 0$ (sinon le degré n'est pas n). Pour étudier les limites en l'infini de P il suffit de regarder le terme $a_n x^n$. En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right).$$

Le facteur de droite tend vers 1 donc on voit que $P(x)$ et $a_n x^n$ ont la même limite.

Proposition 4 | Limites en l'infini

- si n est pair,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}.$$

- si n est impair,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0 \\ +\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}.$$

Fonctions polynomiales de degré 3 Un polynôme de degré 3 est une fonction de la forme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$. L'étude précédente nous assure que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Dans les deux cas ($a > 0$ et $a < 0$), le théorème des valeurs intermédiaires assure que 0 a un antécédent par P : il existe un réel α tel que $P(\alpha) = 0$. On peut donc factoriser P par $(x - \alpha)$ et se ramener à l'étude d'un polynôme de degré 2. Mais attention, on ne peut pas toujours déterminer α de façon explicite.