

CHAPITRE 3

Nombres réels, inégalités

1. RAPPELS

1.1. Quelques règles de calcul

Pour comparer deux réels, on a deux signes : $\leq$ (inégalité large) et $<$ (inégalité stricte). En français, quand on dit qu'un nombre x **est plus petit que** y , on sous-entend $x \leq y$, donc que x est inférieur ou égal à y . Pour décrire $x < y$, on dit que x est strictement inférieur à y .

Définition 1 | Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

On dit que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car

1. **(Réflexivité)** $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$,
2. **(Antisymétrie)** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
3. **(Transitivité)** $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Proposition 1 | Règles de calcul

Soient x, y, z, t, λ des nombres réels.

1. $x < y \Rightarrow x \leq y$ (la réciproque est fausse),
2. **[Addition]**
 - $x \leq y \iff x + z \leq y + z$,
 - $x < y \iff x + z < y + z$,
3. **[Addition - 2]**
 - si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x + z \leq y + t$,
 - si $x < y$ et $z \leq t$ alors $x + z < y + t$,
4. **[Multiplication]**
 - par un réel strictement positif : si $x \leq y$ et $\lambda > 0$ alors $\lambda x \leq \lambda y$ (fonctionne aussi avec $x < y$),
 - par un réel strictement négatif : si $x \leq y$ et $\lambda < 0$ alors $\lambda x \geq \lambda y$ (fonctionne aussi avec $x < y$),
 - d'inégalités entre réels positifs : si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$ alors $0 \leq xz \leq yt$,
5. **[Signe d'un produit]** $xy \geq 0$ si et seulement si x et y sont de même signe,
6. **[Passage à l'inverse]** si $x \leq y$ et si x, y sont des réels non nuls **de même signe**,

alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$. Cela fonctionne aussi avec $x < y$.



Attention

Si $x < 0 < y$, le passage à l'inverse ne change pas le sens de l'inégalité : on a $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$, car l'inverse conserve le signe.

Exemple 1 — Montrer que $\forall x > 2, \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{5}$

Proposition 2 | Composition par une fonction monotone

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I .

1. Si f est croissante sur I alors

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

La réciproque est vraie si f est strictement croissante.

2. Si f est strictement croissante sur I alors

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \iff f(x) < f(y).$$

3. Si f est décroissante sur I alors

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

La réciproque est vraie si f est strictement décroissante.

4. Si f est strictement décroissante sur I alors

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \iff f(x) > f(y).$$

1.2. Intervalles

Dans ce paragraphe, a et b sont deux réels tels que $a \leq b$.

Définition 2 | Intervalles bornés de $\mathbb{R}$

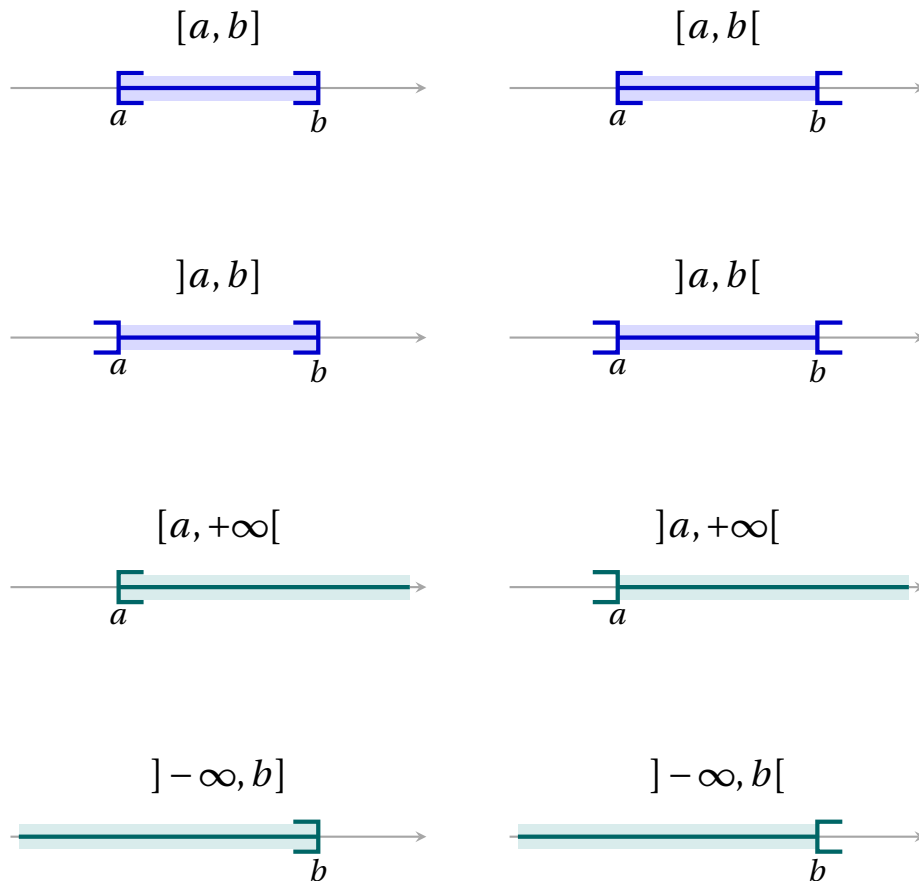
Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ sont les intervalles suivants :

- intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$,
- intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$,
- intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$,
- intervalle ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.

Définition 3 | Intervalles non bornés de $\mathbb{R}$

Les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et les intervalles suivants :

- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$,
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$,
- $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$,
- $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$.



2. VALEUR ABSOLUE, INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Définition 4 | Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel x est donnée par

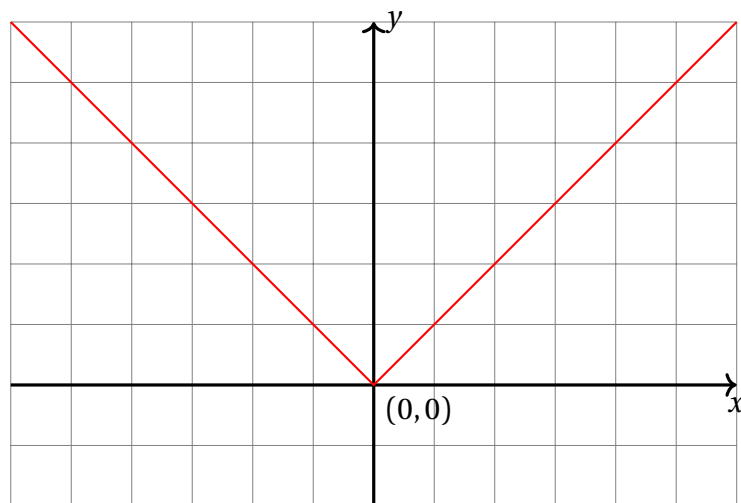
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposition 3

La fonction qui à un réel associe sa valeur absolue est

- continue sur $\mathbb{R}$,
- dérivable sur $] -\infty, 0[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$,
- non dérivable en 0,
- strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Représentation graphique :



Théorème 1 | Inégalité triangulaire

Pour tous réels x, y on a

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont de même signe (c'est-à-dire $xy \geq 0$).

Preuve On commence par prouver la deuxième inégalité. Les deux membres étant positifs et la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} |x+y| \leq |x|+|y| &\iff |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \\ &\iff x^2+y^2+2xy \leq x^2+y^2+2|x||y| \\ &\iff xy \leq |xy|, \text{ ce qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$

Les mêmes équivalences montrent qu'on a égalité si et seulement si $xy = |xy|$, autrement dit si et seulement si $xy \geq 0$, c'est-à-dire si x et y sont de même signe.

Pour la première inégalité, on applique la deuxième à $x+y$ et $-y$:

$$|x| = |(x+y) + (-y)| \leq |x+y| + |-y|, \quad \text{donc} \quad |x| - |y| \leq |x+y|.$$

En échangeant les rôles de x et y , on obtient $|y| - |x| \leq |x+y|$. Ainsi $-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$, c'est-à-dire $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

Pour résoudre les inéquations avec des valeurs absolues, on est souvent amené à utiliser des disjonctions de cas.

Exemple 2 — Résoudre l'inéquation $|2x-1| + |2x+1| \leq |4x+2|$ Pour cela, on identifie d'abord les différents intervalles sur lesquels les expressions à l'intérieur des valeurs absolues changent de signe, puis on résout l'inéquation sur chacun d'eux.

On pourra utiliser les résultats suivants :

Proposition 4

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$,

$$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M.$$

Cela fonctionne aussi avec les inégalités strictes.

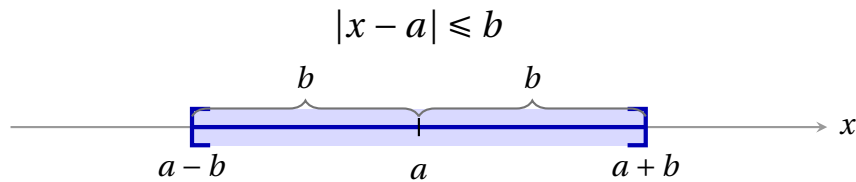
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|xy| = |x||y|.$$

Définition 5 | Distance entre deux réels

La distance entre deux réels x et y est $d(x, y) = |x - y|$.

Remarque 2.1 — On peut visualiser l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leq b$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$) par ce type de représentation :



C'est l'ensemble des réels dont la distance à a est inférieure ou égale à b . On retrouve bien la représentation de l'intervalle $[a - b, a + b]$, ce qui est logique car :

$$|x - a| \leq b \iff -b \leq x - a \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b.$$

On peut représenter de la même façon d'autres types d'inégalités, comme $|x - a| > b$, etc.

3. BORNES

Dans toute cette partie, $X \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 6 | Majorant, minorant

Soient $M, m \in \mathbb{R}$. On dit que

- M est un **majorant** de X si pour tout $x \in X$, $x \leq M$,
- m est un **minorant** de X si pour tout $x \in X$, $x \geq m$.

Remarque 3.1 — On a l'habitude de noter un majorant M (avec une majuscule) et un minorant m (avec une minuscule).

Définition 7 | Parties majorées, minorées, bornées

On dit que :

1. X est **majorée** si elle admet un majorant,
2. X est **minorée** si elle admet un minorant,
3. X est **bornée** si elle admet un minorant et un majorant.

Exemple 3 —

1. $] -\infty, 2[$ n'est pas minoré. Mais il est majoré et tout réel supérieur ou égal à 2 en est un majorant,
2. $\mathbb{R}$ n'est ni majoré ni minoré,
3. $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré ni majoré,
4. $\mathbb{N}$ est minoré par tout réel inférieur ou égal à 0. Il n'est pas majoré.

Remarque 3.2 — Une partie X est bornée si et seulement si l'ensemble $Y = \{|x|, x \in X\}$ est majoré.

En effet, si $m \leq x \leq M$ pour tout $x \in X$, alors $|x| \leq \max(|m|, |M|)$ pour tout $x \in X$. Réciproquement, si $|x| \leq K$ pour tout $x \in X$, alors $-K \leq x \leq K$ pour tout $x \in X$.

Remarque 3.3 — Si X est majorée, alors elle admet une infinité de majorants. En effet, si M est un majorant de X , tout réel supérieur à M l'est aussi. Par exemple, $[0, 2]$ admet 2 pour majorant, mais aussi 3, 3,5, 2,0001 ou 10 000 000.

Définition 8 | Maximum, minimum

1. Le **maximum** d'un ensemble X , s'il existe, est un majorant de X qui appartient à X .
2. Le **minimum** d'un ensemble X , s'il existe, est un minorant de X qui appartient à X .

Exemple 4 —

1. $\mathbb{R}$ n'a ni minimum ni maximum,
2. tout intervalle $[a, b]$ admet a pour minimum et b pour maximum,
3. $[-5, 1[$ admet -5 pour minimum mais n'a pas de maximum,
4. $[-5, 1] \cup \{2\}$ a -5 pour minimum et 2 pour maximum,
5. $\{\cos(x), x \in \mathbb{R}\}$ admet -1 pour minimum et 1 pour maximum.

Remarque 3.4 — Un **extremum** (c'est-à-dire un minimum ou un maximum) est unique s'il existe.

Définition 9 | Borne supérieure, borne inférieure

La **borne supérieure** de X , lorsqu'elle existe, est le plus petit de ses majorants. De même, la **borne inférieure** de X , lorsqu'elle existe, est le plus grand de ses minorants.

Σ Notation

La borne supérieure de X , si elle existe, est notée $\sup X$. La borne inférieure de X , si elle existe, est notée $\inf X$.

Proposition 5

Lorsqu'une partie X admet un maximum (resp. un minimum), elle admet celui-ci comme borne supérieure (resp. inférieure).

Exemple 5 —

1. $\mathbb{R}$ n'a ni borne inférieure ni borne supérieure car il n'a ni majorant ni minorant.
2. L'intervalle $I = [0, 1[$ admet 0 comme borne inférieure car c'est son minimum.
Il admet aussi 1 comme borne supérieure. En effet, 1 est bien un majorant de I : tout élément de $[0, 1[$ est inférieur à 1.
Montrons que c'est le plus petit des majorants de I : pour cela, on montre que tout réel strictement plus petit que 1 **n'est pas** un majorant. Soit $m < 1$. Si $m < 0$, ce n'est pas un majorant de I car $0 \in I$ et $0 > m$. Si $m \in [0, 1[$, alors $m' = \frac{m+1}{2} \in I$ alors que $m' > m$. Donc m n'est pas un majorant de I .
Ainsi I admet une borne supérieure et $\sup I = 1$.

On en déduit une méthode générale.



Méthode

Pour montrer qu'un réel s est la borne supérieure d'une partie $X \subset \mathbb{R}$:

1. on montre que s est un majorant de X ;
2. on montre que tout majorant M de X vérifie $M \geq s$ (de façon équivalente : tout réel $m < s$ n'est pas un majorant de X).

Théorème 2 | Théorème de la borne supérieure

Toute partie non vide et majorée (respectivement non vide et minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement inférieure).

Remarque 3.5 — Ce théorème découle de la construction de $\mathbb{R}$, qui est largement hors programme. Il est donc admis.

La proposition suivante découle directement de la définition de la borne supérieure (comme plus petit des majorants) et de la borne inférieure (comme plus grand des minorants).

Proposition 6 | Passage à la borne supérieure / inférieure

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

1. Si $\forall x \in X, x \leq M$, alors X est majorée et $\sup X \leq M$.
2. Si $\forall x \in X, x \geq M$, alors X est minorée et $\inf X \geq M$.

4. COMPLÉMENTS

4.1. Partie entière

Définition 10 | Partie entière d'un réel

La partie entière d'un réel x , notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Exemple 6 —

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor n \rfloor = n$,
2. $\lfloor 3,5 \rfloor = 3, \lfloor 101,0001 \rfloor = 101$,
3. attention aux négatifs : $\lfloor -7,5 \rfloor = -8$.

Remarque 4.1 — On peut aussi parler de la partie entière supérieure, notée $\lceil x \rceil$, qui est le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x .

Proposition 7

La fonction qui à un réel x associe sa partie entière est

1. croissante sur $\mathbb{R}$,
2. constante (donc continue) sur tout intervalle de la forme $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$,
3. discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 8

La fonction partie entière vérifie

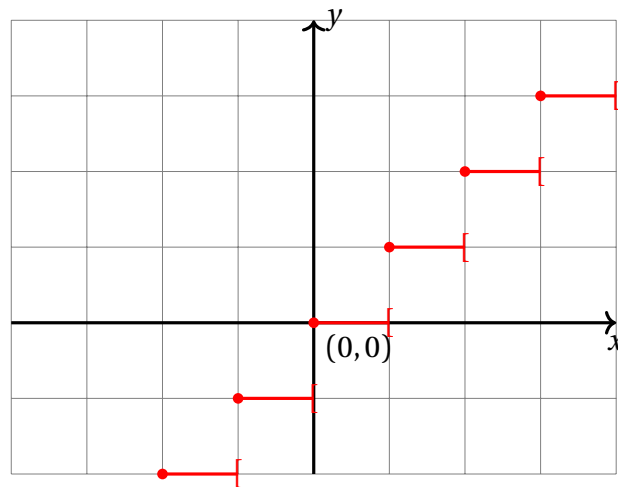
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

En particulier, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Remarque 4.2 — Dans un exercice sur les parties entières, on utilisera souvent que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Représentation graphique.



Comment étudier des égalités et inégalités avec des parties entières.

1. On cherche si l'égalité (ou l'inégalité) à étudier est périodique, et on détermine une période (souvent 1).
2. On fait l'étude sur un intervalle de longueur une période : on le découpe en sous-intervalles sur lesquels on peut trouver une expression plus simple, sans parties entières.
3. Sur chacun de ces sous-intervalles, on résout l'équation ou l'inéquation.