

Soutien 2 – Raisonnement par récurrence, valeur absolue

1. DÉMONSTRATIONS PAR RÉCURRENCE

Rappel de cours – Principe de récurrence

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- **Initialisation** : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$ fixé, puis on montre sous cette hypothèse que $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 1 (Somme des premiers entiers) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2 (Somme des premiers carrés) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 3 (Inégalité de Bernoulli) Soit $a > 0$ un réel fixé. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Exercice 4 (Démonstration de divisibilité) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 5 (Comparaison de 2^n et n^2)

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.
2. En déduire par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$:

$$2^n \geq n^2$$

Exercice 6 (Dérivées successives) Soit $f : x \mapsto xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

Exercice 7 (Une récurrence double) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$$

Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n = e^n$.

2. VALEUR ABSOLUE

Rappel de cours – Valeur absolue

Pour tout réel x , la valeur absolue de x est le réel positif défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour tous réels x et y :

- $|x| = \max(x, -x)$, $|-x| = |x|$ et $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|xy| = |x| |y|$;
- $|x - y|$ est la distance entre x et y sur la droite réelle ;
- inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Du nouveau ! – Résolution d'équations et d'inéquations

Soient X et Y deux réels et $a \geq 0$. Alors :

- $|X| = a \iff X = a \text{ ou } X = -a$;
- $|X| = |Y| \iff X = Y \text{ ou } X = -Y$;
- $|X| \leq a \iff -a \leq X \leq a$;
- $|X| \geq a \iff X \leq -a \text{ ou } X \geq a$.

Si $a < 0$, l'équation $|X| = a$ n'a pas de solution, puisqu'une valeur absolue est toujours positive.

En termes de distance, pour $c \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$: $|x - c| \leq r \iff x \in [c - r, c + r]$.

Exercice 8 (Une disjonction de cas) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$.

1. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$, $[-2, 1[$ et $[1, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 5$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 5$.

Exercice 9 (Équations avec valeurs absolues) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $|2x - 3| = 5$;

- b) $|x + 4| = -2$;
- c) $|3x - 1| = |x + 5|$;
- d) $|x - 2| = 2x + 1$.

Exercice 10 (Inéquations avec valeurs absolues) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, et donner les solutions sous forme d'intervalles :

- a) $|x - 3| \leq 2$;
- b) $|2x + 1| < 3$;
- c) $|x + 1| \geq 4$;
- d) $|1 - 3x| > 2$.

Exercice 11 (Simplifications) Écrire les expressions suivantes sans valeur absolue :

- a) $|\sqrt{2} - 2|$;
- b) $|\pi - 3| + |3 - \pi|$;
- c) $|\ln(\frac{1}{2})|$;
- d) $|1 - e|$;
- e) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;
- f) $|\ln x| + |x - 1|$, pour $x \in]0, 1[$.