

TD 1 : Rappels de terminale, calculs

1. CALCULS

Exercice 1 Simplifier les calculs suivants :

1. $5 + 2 \times \frac{7}{3}$
2. $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{12}{25}}$
3. $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{12}{7} + \frac{11}{2}\right)$
4. $\frac{12}{x-1} + \frac{3x-9}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^3-x}$

Exercice 2 Transformer chacune des expressions suivantes en expressions égales avec le moins de racines carrées possibles (notamment, on ne veut **aucune** racine carrée au dénominateur).

1. $A = \frac{5}{2-\sqrt{7}}$
2. $B = \sqrt{64} + \sqrt{128}$
3. $C = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
4. $D = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$
5. $E = \sqrt{12x^2 - 72x + 108}$
6. $F = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)$

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (-1)^n \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n+2}$
2. $B = \frac{2^4 \times 4^2}{8 \times 3^{-4}}$
3. $C = \frac{3^{-2} \times 2^{-2}}{3^{-7} \times 2^2}$
4. $D = x \sqrt{x} x^2 \times 7 \frac{x^2}{x^3}$

2. RAPPELS SUR LES SUITES

Exercice 4 Parmi les suites suivantes, déterminer lesquelles sont arithmétiques ou géométriques :

1. $u_n = 3 + 5n$
2. $v_n = 12 - \sqrt{n}$
3. $w_n = -7^n$
4. $x_n = \sqrt{2^{2n+1}}$
5. $y_n =$ le n -ième entier positif pair
6. $z_n = \cos(n\pi)$ et $z'_n = \sin(n\pi)$

Exercice 5 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

1. Donner une expression de u_n .

2. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2u_0 + nr}{2}.$$

3. Généraliser au calcul de la somme $u_j + \cdots + u_{j+n}$ où $j \in \mathbf{N}$.
4. En déduire la valeur des sommes

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n \text{ et } 1 + 3 + \cdots + (2n + 1).$$

Exercice 6 Déterminer une expression explicite de la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 10.$$

Déterminer sa limite éventuelle.

Exercice 7 On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2.$$

1. Calculer les premiers termes de la suite.
2. Conjecturer une formule pour u_n et la démontrer par récurrence.
3. On souhaite montrer le résultat précédent d'une autre façon. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \ln(u_n)$. Démontrer que cette suite est bien définie et géométrique. En déduire l'expression explicite de (u_n) .

Exercice 8 On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{e u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire une expression explicite pour (v_n) puis pour (u_n) .
4. Peut-on déterminer une limite pour u_n ?

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ (où a et b sont des réels fixés) et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2}.$$

Déterminer l'expression générale de u_n et éventuellement sa limite.

Exercice 10 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} u_n.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$ (pourquoi?). En utilisant la suite auxiliaire $v_n = \ln(u_n)$, déterminer l'expression générale de u_n .

3. POLYNÔMES

Exercice 11 Réaliser l'étude complète des trinômes du second degré suivants : forme canonique, racines, variations, signe, courbe représentative.

1. $P(x) = x^2 - 3x + 2$
2. $Q(x) = -3x^2 + 18x - 27$
3. $R(x) = -2x^2 + 4x - 7$

Exercice 12 Résoudre les équations suivantes en se ramenant à l'étude d'un polynôme du second degré :

1. $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
2. $-x^{10} + 3x^9 - 3x^8 = 0$
3. $e^{6x} + 4e^{3x} = 1$

Exercice 13 On définit le polynôme P par

$$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

4. ÉTUDES DE FONCTIONS

Exercice 14 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = (2x - 5) \times e^{-x}$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 15 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variations de f .
3. En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.