

TD 2 - Raisonnements. Éléments de logique.

1. PROPOSITIONS LOGIQUES

Exercice 1 Écrire les affirmations suivantes avec des quantificateurs :

1. Tout réel x admet un réel qui lui est au moins trois fois plus grand,
2. Il existe un unique entier relatif qui est strictement plus petit que tous les autres nombres relatifs,
3. Quel que soit le réel y , l'équation $e^x = y + 1$ d'inconnue x admet une unique solution,
4. La suite (u_n) est majorée.

Exercice 2 Traduire en français puis donner les négations des affirmations suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$,
2. $\forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq A < n + 1$,
3. $\forall x > 0, \exists \epsilon > 0, 0 < \epsilon < x$,
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow \exists z \in [x, y], f'(z) = 0$.

2. CONTRAPOSITION, ABSURDE

Exercice 3 Par l'absurde, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 4 Montrer les propositions suivantes :

1. Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n^2 - 1$ est divisible par 8, alors n est impair.

3. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$. Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n .

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2^n$. Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n .

Exercice 7 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 8 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 = \sum_{k=0}^n k^3.$$

Exercice 9 On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Montrer, par récurrence double, que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

Exercice 10 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $n \leq u_n$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 2, u_1 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \frac{u_n}{n+2}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 5 - 3 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$.

Exercice 13 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq n!$.

Exercice 14 Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

4.

AUTRES RAISONNEMENTS

Exercice 15 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

Exercice 16 Montrer les propositions suivantes :

1. $\forall x > 0, \exists \epsilon > 0, 0 < \epsilon < x$,
2. $\forall A > 0, \exists ! n \in \mathbb{N}, n \leq A < n + 1$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x = \ln(z^2)$.

Exercice 17 Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}_+, y^2 - \sqrt{x} = 1.$$

Exercice 18

1. Déterminer toutes les fonctions réelles dérivables vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2. Déterminer toutes les fonctions réelles vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + y.$$

Exercice 19

1. Soit a un réel positif. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq na$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.

Exercice 20 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- a) la fonction f s'annule
- b) la fonction f est la fonction nulle
- c) f n'est pas une fonction constante

- d) f ne prend jamais deux fois la même valeur
- e) la fonction f présente un minimum
- f) f prend des valeurs arbitrairement grandes
- g) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 21 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Écrire les négations des phrases quantifiées suivantes :

- a) $\exists M \in \mathbb{R}, (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M)$.
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$.
- c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- d) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Exercice 22 On note E l'ensemble des fonctions réelles, E_p et E_o respectivement les ensembles des fonctions paires et impaires. Écrire avec des quantificateurs la phrase mathématique "toute fonction réelle se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire". Montrer ensuite cette propriété par analyse-synthèse.