

TD 3 - Nombres réels

1. QUELQUES ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes, (après avoir vérifié convenablement l'ensemble de définition!)

- $5\left(\frac{x}{2} - 5\right) - 2\frac{x}{3} + 3 = 5,$
- $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = x + \sqrt{2},$
- $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x-1}{x-5},$
- $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{-x+2}{x-2} + 1,$
- $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{-x+2}{x-2},$
- $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+2},$
- $\sqrt{x^2+9} = 2,$
- $|x-2| = 2,$
- $|2x-3| - |2-x| = 1,$
- $\sqrt{x-3} = x+2,$
- $x-1 = \sqrt{x-1}.$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x . λ est un paramètre réel.

- $(\lambda^2 - 1)x = \lambda + 1,$
- $(\lambda^2 - 1)^2 x^2 - 2(\lambda^2 - 1)x = -1,$
- $(\lambda - 4)x^2 - 2(\lambda - 2)x + \lambda - 1 = 0.$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes

- $(x^2 - 4x + 3)(x - 1) < 0,$
- $\frac{x^2-1}{x+3} \geq \frac{x+3}{x-1},$
- $\frac{x-2}{x-3} \leq \frac{x+1}{x+2},$
- $\frac{x-2}{x-3} \leq \frac{-2x+1}{x+2},$
- $|x-3| > 5,$
- $|-3x+1| \leq |x+2|,$
- $\sqrt{x-2} > 2x+2,$
- $\sqrt{3-x} \leq x-4,$

Exercice 4 Résoudre l'inéquation suivante (avec un paramètre $m \in \mathbb{R}$) :

$$(m^2 - 1)x = m + 1.$$

Exercice 5 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $2^{x^2} = 3^{x^3}$
- $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
- $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$
- $\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)}$ avec $a > 0, a \neq 1.$
- $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1.$

2. BORNES

Exercice 7 Pour les parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer les

bornes inférieures et supérieures si elles existent, et le maximum et minimum s'ils existent.

1. $A = \left\{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $B = \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{Z}^*\right\}$
3. $C = \left\{1 - \frac{1}{n-m}, n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m\right\}$
4. $D = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2}, p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $E = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 8 Pour chacune des parties de $\mathbf{R}$ décrites, déterminer s'ils existent leur minimum, maximum, borne inférieure, borne supérieure.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. $\mathbf{R}_+$, | 6. $]1, 2] \cap [\frac{3}{2}, 9[$, |
| 2. $\mathbf{R}_-$, | 7. $\{\frac{1}{1-x}, x \in]1, +\infty[$, |
| 3. $\{1, 2, \dots, 9\}$, | 8. $\{\frac{1+(-1)^n}{n}, n \in \mathbf{N}^*\}$, |
| 4. $] -1, 2[\cup \{3\}$, | 9. $\{\cos(n), n \in \mathbf{N}\}$. |
| 5. $\{1 + 2n, n \in \mathbf{N}\}$, | |

Exercice 9 Soient A et B deux parties majorées de $\mathbf{R}$. On définit l'ensemble $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que $A + B$ est majoré.
2. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure.
3. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. On suppose que A et B sont minorées. Que peut-on dire de $A + B$?
5. Dans cette dernière question, on ne suppose plus que A et

B sont majorées. On suppose que $A + B$ est majorée. A-t-on nécessairement A et B majorées?

Exercice 10 Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbf{R}$ telles que : $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

3. INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Exercice 11 Avec l'inégalité triangulaire, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$

$$|2x - 3| + |6 - 2x| = 3.$$

Exercice 12 On considère le sous ensemble de $\mathbf{R}$:

$$A = \{\cos(a + b) - \sin(a) + \sin(b), (a, b) \in \mathbf{R}^2\}.$$

1. Montrer que $A \subset [-3, 3]$,
2. Montrer que A admet un maximum.

4. PARTIE ENTIÈRE, VALEUR ABSOLUE

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x| = 5$
2. $|x| \leq 2$
3. $|x| > 4$
4. $|x - 3| = \frac{5}{3}$
5. $|x + 2| = \frac{1}{2}$
6. $|2x + 3| - |2 - x| = -3$
7. $|x + 1| - |2x + 1| = 0$
8. $x - 2 = \sqrt{x}$
9. $|2x - 1| \leq |x + 2|$
10. $|x + 3| - 2|x - 1| > 2$
11. $|2x + 1| \leq |x + 2| + 2x$
12. $|x + 2| \geq \frac{1-x}{1+x}$
13. $x + 1 \leq \sqrt{x + 2}$
14. $|x^2 - 3| > 2.$

Exercice 14 Étudier la fonction réelle f définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. On montrera notamment qu'elle est périodique et on donnera une période.

Bonus. Faire de même avec $g(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 15

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 16 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right) \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 17 Résoudre l'inéquation $x^2 - 4|x| < 5$.

Exercice 18 Montrer pour tous réels x et y et pour tout entier n , on a :

$$|x + y|^n \leq 2^n (|x|^n + |y|^n).$$