

TD - Révisions d'algèbre

1. MATRICES

Exercice 1 (Solution : 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0_n$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 2 On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si la somme de ses coefficients sur chaque ligne vaut 1 et si chacun de ses coefficients est positif. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notées $E_{i,j}$) qui ont des zéros sur tous leurs coefficients sauf le coefficient de coordonnées (i,j) qui vaut 1.

Pour tout (i,j) et (k,ℓ) , calculer le produit $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$.

Exercice 4 (Solution : 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice contenant uniquement des 1.

1. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une formule pour $(\lambda I_n + A)^k$ à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 5 (Solution : 13) Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D .
3. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}M^nP$.
4. En déduire une formule pour M^n .

Exercice 6 On définit la trace d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n M_{k,k}.$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$.
2. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

3. Montrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(A^t A) \geq 0$ et $\text{Tr}(A^t A) = 0 \iff A = 0_n$.
4. Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 .
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 5a_n$.

Exercice 7 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. On raisonnera par analyse-synthèse.

Exercice 8 On définit deux suites par :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases}.$$

On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. Montrer que $A^2 = 5A - I_2$.
3. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I_2$$

et qu'elles vérifient les relations de récurrence :

$$a_{n+1} = 5a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -5a_n.$$

Exercice 9 Commutant d'une matrice diagonalisable.

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à **coefficients distincts**. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D .
2. Montrer que l'ensemble trouvé est égal à $\{Q(D) \mid Q \in \mathbb{R}[x]\}$.
3. On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que C commute avec A si et seulement si $P^{-1}CP$ commute avec B .
4. On dit qu'une matrice M est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}MP = D$. Soit M une matrice diagonalisable. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$.
5. Déterminer les matrices qui commutent avec M .
6. Montrer que l'ensemble trouvé est égal à $\{Q(M) \mid Q \in \mathbb{R}[x]\}$.

Exercice 10 (Solution : 14) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (Solution : 14) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 2A^2 - A + I_n = 0_n$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $AX = \lambda X$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k X = \lambda^k X$. En déduire que si $X \neq 0$, on a $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Exercice 12 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tA$ est inversible si et seulement si A est inversible. Déterminer l'inverse de ${}^tA$ en fonction de celle de A .

Exercice 13 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si B est inversible, alors AB et BA sont semblables.

2. ESPACES VECTORIELS

Exercice 14 Justifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F .

Exercice 15 Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 2z = 0 \text{ et } -x - 4y + 2z = 0\}$
3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 2z = 0 \text{ et } 4x + 2y - 6z = 0\}$

Exercice 16 Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_n + e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si n est impair.

Exercice 17 Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice est inversible. Après avoir prouvé que c'est un espace vectoriel, déterminer la dimension de $\{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0_{2,1}\}$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 Soit $n \geq 1$. Prouver que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid P'(0) = P(0)\}$ est un espace vectoriel, puis déterminer une base et sa dimension.

Exercice 19 (Solution : 15) Montrer que l'ensemble des matrices qui peuvent s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & a & a-b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

est un espace vectoriel. En donner une base et la dimension.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un espace vectoriel. Déterminer une base et sa dimension.

Exercice 21 On définit

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(2-x) = P(x)\}.$$

Montrer que c'est un espace vectoriel, donner sa dimension et une base.

Exercice 22 Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$.

1. La matrice A est-elle inversible?
2. Justifier qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X \neq 0_{n,1}$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (X, AX, A^2X, \dots, A^{n-1}X)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 23 Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$).

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que :

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(AM) = 0\}.$$

2. En déduire que H contient au moins une matrice inversible.

Indication : on pourra remplacer A par une matrice équivalente.

3. APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 24 Les applications suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

1. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$
2. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y+2x \end{pmatrix}$
3. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$
4. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$
5. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25 Les applications suivantes sont-elles linéaires?

1. $f : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto xP(x) \in \mathbb{R}[x]$
2. $f : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P(x^2) \in \mathbb{R}[x]$
3. $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^t M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice fixée.

$$4. f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a+b \\ -c & d+2a+c \end{pmatrix}$$

Exercice 26 Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g).$$

Exercice 27 Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f^2)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Im}(f)$.

Exercice 28 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.

Exercice 29 Soit f l'application de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ z+y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer l'image et le noyau de f .
3. f est-elle injective, surjective, inversible?

Exercice 30 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

1. Montrer que si u est surjective, alors $m \leq n$.
2. Montrer que si u est injective, alors $m \geq n$.
3. Que peut-on dire si u est un isomorphisme?

Exercice 31 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker } u$.
2. Donner le rang de u .
3. Donner une base de l'image de u .

Exercice 32 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
 - a) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\lambda_x = \lambda_y$. *On raisonne par disjonction de cas selon la liberté de la famille (x, y) .*

- b) En déduire que f est une homothétie.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$.
 - a) Soit $x \in E$ non nul et p un projecteur sur $\text{Vect}(x)$. En utilisant p , montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$.
 - b) En déduire que f est une homothétie.
 - c) Déterminer le centre de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

Exercice 33 Soient ϕ et ψ deux formes linéaires **non nulles** sur un espace vectoriel E de dimension n .

1. Montrer que $\text{Ker } \phi \subset \text{Ker } \psi$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \phi = \psi$.
2. Dans ce cas, démontrer que les noyaux sont égaux. Quelle est leur dimension?
3. On se place dans le cas où l'on n'a pas d'inclusion entre les deux noyaux. Soit u l'application de E dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = (\phi(x), \psi(x)).$$

Montrer que u est linéaire.

4. Montrer que u est surjective.
5. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Ker } \phi \cap \text{Ker } \psi$.
6. En déduire $\dim(\text{Ker } \phi \cap \text{Ker } \psi)$.

Exercice 34 Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1), \quad f(1,1,0) = (1,0) \quad \text{et} \quad f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer le noyau et l'image de f . Quelle est la matrice de f dans la base canonique?

Exercice 35 Déterminer la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$u(x,y,z) = (x - y + z, x + y - 2z, z - x - y).$$

En déduire une expression de u^2 par une méthode matricielle.

Exercice 36 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base (e_1, e_2, e_3) , défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(e_2 + e_3), \quad f(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3), \quad f(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2).$$

- Déterminer la matrice M de f dans la base (e_1, e_2, e_3) .
- On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et donner son inverse.

- Justifier que $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans une base de E à déterminer.

$$4. \text{ Montrer que } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P^{-1}MP)^n$.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$.
- Soit $x \in E$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)$.

Exercice 37 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 12 & 18 \\ 12 & 15 & 18 & 28 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38 Calculer le rang des matrices suivantes :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Exercice 39

- Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice $A - \lambda I_3$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1 - e_3, e_2, 3e_1 + e_3)$ est une base de E .
- Soit u un endomorphisme représenté par A dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

- En déduire la matrice de u^n dans la base $\mathcal{B}'$.
- En déduire la matrice de u^n dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 40 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

- Montrer qu'il existe deux matrices X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $M = X {}^t Y$.
- En déduire que $M^2 = \text{Tr}(M)M$.
- En déduire une formule pour M^n .

Exercice 41 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est nilpotent d'ordre n , c'est-à-dire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$ et que ces sous-espaces ne sont pas égaux.
- En déduire pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ la dimension de $\text{Ker } f^k$.
- Écrire la matrice de f dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la matrice de f^k .
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, donner la matrice de $(\lambda I_n + f)^k$.

4. ORAUX

Exercice 42 Soient $N \geq 2$ un entier et $a, b \in \mathbb{R}$. On note E l'ensemble des vecteurs $u = (u_0, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant :

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, N-2\}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{N+1}$.
2. Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à un élément $u \in E$ associe le couple (u_0, u_1) est un isomorphisme, et en déduire la dimension de E .
3. Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose $v_r = (1, r, \dots, r^N)$. Déterminer les réels r tels que le vecteur v_r est dans E .
4. On note p la fonction polynomiale qui à un réel x associe $p(x) = x^2 - ax - b$.
 - a) On se place dans la situation où p a deux racines réelles distinctes. Donner deux vecteurs explicites de $\mathbb{R}^{N+1}$ qui forment une base de E . En déduire une expression explicite des éléments de E .
 - b) Faire de même dans la situation où p admet une racine réelle double. *Indication : on vérifiera que si r est cette racine, alors le vecteur $(nr^n)_{n=0}^N = (0, r, 2r^2, \dots, Nr^N)$ est dans E .*
5. Dans chacune des deux situations suivantes, déterminer, pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, la valeur de u_n :
 - a) $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \{0, \dots, N-2\}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

$$\text{b) } u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \{0, \dots, N-2\}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Exercice 43 Étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère la procédure définie en appliquant successivement les quatre étapes suivantes :

- a) Échanger la première ligne et la troisième ligne ;
- b) Dans la matrice obtenue, soustraire la deuxième colonne à la troisième ($C_3 \leftarrow C_3 - C_2$) ;
- c) Dans la matrice obtenue, ajouter la troisième ligne à la deuxième ($L_2 \leftarrow L_2 + L_3$) ;
- d) Dans la matrice obtenue, échanger la première colonne et la troisième colonne.

On notera $\varphi(M)$ la matrice obtenue en appliquant cette procédure. Enfin, on pose :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 10 & 20 & 50 \\ 100 & 200 & 500 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\varphi(N)$.
2. Trouver deux matrices P et Q telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on ait $\varphi(M) = PMQ$.
3. Si on applique les étapes dans l'ordre «acbd», cette nouvelle procédure renvoie-t-elle toujours $\varphi(M)$? Même question pour l'ordre «adcb».

4. L'application φ définit-elle un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner sa bijection réciproque.
5. a) Déterminer la matrice PQ.
b) Exprimer le spectre de $\varphi(M)$ en fonction du spectre de M .

Exercice 44 Soit $n \geq 1$ un entier et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'on a l'égalité :

$$f \circ f + 15 \text{Id} = 8f.$$

1. Déterminer deux réels distincts a et b tels que :

$$f \circ f - 8f + 15 \text{Id} = (f - a \text{Id}) \circ (f - b \text{Id}).$$

2. On suppose dans cette question que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - a \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - b \text{Id})$. Montrer que f est diagonalisable.
3. a) Déterminer $\text{Ker}(f - a \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - b \text{Id})$.
b) Établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - a \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - b \text{Id})$.

Exercice 45 Soit $n \geq 2$ un entier. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée, notée ${}^tM$.

1. Vérifier que si M est symétrique, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, M^k est symétrique.
2. Montrer que si M est symétrique, alors $\text{Tr}(M^2) \geq 0$. À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité?

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

3. On suppose que $M^4 = I_n$. Simplifier $(M^2 - I_n)^2$ et $(M^3 - M)^2$. En déduire que $M^2 = I_n$.
4. On admet que M est diagonalisable. Montrer que s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $M^p = I_n$, alors $M^2 = I_n$.

Exercice 46 ENSAE Soit E un espace vectoriel de dimension n . On dit qu'un endomorphisme f est nilpotent s'il existe un entier k tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans ce cas, on appelle indice de nilpotence de f l'unique entier j tel que $f^j = 0$ et $f^{j-1} \neq 0$. Soit f un endomorphisme nilpotent.

1. Montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, $f - \lambda \text{Id}$ n'est pas nilpotent.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.
a) Montrer que $g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$.
b) Montrer que $g \circ f$ est nilpotent.
3. On suppose maintenant que f est d'indice de nilpotence égal à 2.
a) Que peut-on dire de $\text{rg}(f)$?
b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$$

où I_r désigne la matrice identité et r le rang de f .

Exercice 47 ENSAE Soient f et g deux projecteurs vérifiant $f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

1. a) Montrer que $f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$. En déduire que pour tout $x \in E$, $f \circ g(x) \in \text{Im } g$.
 b) En déduire que $\text{Im } f \subset \text{Im } g$.
 c) Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } g$.
2. a) Montrer que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker } f$ et que $\text{Im } g = \{x \in E \mid g(x) = x\}$.
 b) Montrer que $f \circ g = f$.
 c) Montrer que $\lambda + \mu = 0$.
 d) En déduire que $f = g$.

Exercice 48 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P = P^2$.

1. Que peut-on en déduire pour P ? Montrer que $\text{rg}(P) = \text{Tr}(P)$.

On cherche à montrer que $\dim \text{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \text{Tr}(A^k)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $A^q = I_n$.

2. Calculer, pour $\ell \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $A^\ell \sum_{k=1}^q A^k$.
3. On pose $B = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q A^k$, montrer que B est un projecteur.
4. Montrer que $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Im}(B)$.
5. Conclure.

Exercice 49 ENSAE

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire qui a tous ses coefficients nuls sauf un 1 à la i -ème ligne, j -ème colonne. Montrer que :

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(MN) = f(NM)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \text{Tr}$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_A : M \mapsto AM$. Montrer que $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
4. Soit $\psi : A \mapsto \phi_A$. Montrer que ψ est un isomorphisme.

5. MÉTHODES À MAÎTRISER

1. Sur les matrices :

- calculer un produit matriciel, utiliser la formule,
- déterminer le noyau et l'image d'une matrice,
- déterminer le rang d'une matrice,
- calculer les puissances d'une matrice carrée en suivant un exercice,
- calculer les puissances d'une matrice carrée à l'aide de la formule du binôme de Newton,
- déterminer si une matrice est inversible et calculer son inverse,
- étudier l'inversibilité d'une matrice 2×2 ,
- utiliser la trace et ses propriétés,
- utiliser les polynômes annulateurs pour étudier l'inversibilité.

2. Sur les espaces vectoriels :

- montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel,
- montrer qu'une famille est libre, génératrice, une base,
- déterminer une famille génératrice, une base d'un sous-espace vectoriel,
- trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base,
- utiliser le théorème de la base incomplète,
- utiliser les dimensions pour traiter les problèmes précédents.

3. Sur les applications linéaires :

- montrer qu'une application est linéaire,
- montrer qu'une application linéaire est un endomorphisme,
- déterminer le noyau, l'image, le rang d'une application linéaire,
- utiliser le théorème du rang,
- déterminer la matrice d'une application linéaire dans une base,
- utiliser les matrices d'applications linéaires pour obtenir des propriétés sur celles-ci,
- réaliser un changement de base,
- utiliser les polynômes annulateurs pour étudier l'inversibilité.

Solution (exercice 1) (Énoncé : 1) On suppose par l'absurde que A est inversible, alors en multipliant l'égalité à gauche par A^{-1} on obtient

$$A^{-1}AB = 0_n$$

donc

$$B = 0_n$$

ce qui est absurde. Ainsi A n'est pas inversible.

Solution (exercice 4) (Énoncé : 1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

- Pour $k = 0$: par convention, $A^0 = I_n$ (la matrice identité).
- Pour $k = 1$: $A^1 = A$.
- Pour $k = 2$: le coefficient (i, j) de $A^2 = A \times A$ est obtenu en multipliant la i -ème ligne de A par la j -ème colonne de A , ce qui donne une somme de n termes égaux à 1. Ainsi, chaque coefficient de A^2 vaut n , c'est-à-dire :

$$A^2 = nA$$

Par récurrence, on montre facilement que pour tout $k \geq 1$:

$$A^k = n^{k-1}A$$

1. **Formule pour $(\lambda I_n + A)^k$ à l'aide du binôme de Newton :**

La matrice scalaire λI_n commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en particulier avec A . On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(\lambda I_n + A)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda I_n)^{k-j} A^j$$

En séparant le terme pour $j = 0$ et en utilisant $A^j = n^{j-1}A$ pour $j \geq 1$:

$$(\lambda I_n + A)^k = \lambda^k I_n + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} n^{j-1} A$$

En factorisant par la matrice A et en faisant apparaître n^j pour reconnaître le binôme de Newton :

$$\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} n^{j-1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} n^j = \frac{(\lambda + n)^k - \lambda^k}{n}$$

Finalement, pour $n \geq 1$:

$$(\lambda I_n + A)^k = \lambda^k I_n + \frac{(\lambda + n)^k - \lambda^k}{n} A$$

Solution (exercice 5) (Énoncé : 1)

1. Le déterminant de P vaut $\det(P) = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$.
Comme $\det(P) \neq 0$, la matrice P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

est bien une matrice diagonale.

3. Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
- **Initialisation** pour $n = 0$: $D^0 = I_2$ et $P^{-1}M^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$. La relation est vraie.
 - **Hérédité** : supposons que le résultat est vrai pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire $D^k = P^{-1}M^kP$. Alors :

$$D^{k+1} = D \times D^k = (P^{-1}MP)(P^{-1}M^kP) = P^{-1}M(PP^{-1})M^kP$$

Puisque $PP^{-1} = I_2$ et que $M \times I_2 \times M^k = M^{k+1}$, on obtient :

$$D^{k+1} = P^{-1}M^{k+1}P$$

Le résultat est donc démontré pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question précédente, on a $D^n = P^{-1}M^nP$. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient :

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n & 2^n \\ 4^n & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$$

Solution (exercice 10) (Énoncé : 2)

1. Le déterminant de A vaut -6 donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Le déterminant de B vaut 0 donc B n'est pas inversible
3. Le déterminant de C vaut 170 donc C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{170} \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution (exercice 11) (Énoncé : 3)

1. On a

$$A^3 + 2A^2 - A = -I_n$$

donc

$$A(-A^2 + 2A - I_n) = I_n$$

donc A est inversible et $A^{-1} = -A^2 + 2A - I_n$.

2.

$$A^k X = A^{k-1} A X = A^{k-1} \lambda X = \lambda A^{k-1} X$$

donc par récurrence, pour tout k , $A^k = \lambda^k X$.

Soit $X \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} A^3 + 2A^2 - A + I_n X &= A^3 X + 2A^2 X - A X + X \\ &= \lambda^3 X + 2\lambda^2 X - \lambda X + X \\ &= (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1)X. \end{aligned}$$

Or $A^3 + 2A^2 - A + I_n = 0_n$ donc $(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1)X = 0$ et $X \neq 0$ donc $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Solution (exercice 19) (Énoncé : 4) L'ensemble est

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.