

# TD 2 - Supplémentaires, projecteurs, symétries

## 1. SUPPLÉMENTAIRES

**Exercice 1** (Solution : 5) Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ .
2. Montrer que  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .
3. Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .
4. Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

**Exercice 2** (Solution : 5) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 + 2f - 3\text{id}_E = 0$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{GL}(E)$ .
2. Montrer que  $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 3\text{id}_E)$ .

**Exercice 3** (Solution : 5) Soit  $E = \mathbb{R}^4$  et

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , puis en déterminer une base et la dimension.
2. Montrer que  $\text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .
3. Proposer un autre supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

**Exercice 4** (Solution : 6) Dans cet exercice,  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ .

1. Vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Montrer que  $\dim(F) = n^2 - 1$ .
3. Trouver un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

**Exercice 5** (Solution : 6) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  vérifiant  $\dim(F) + \dim(G) > n$ , montrer que  $F \cap G \neq \{0_E\}$ .

**Exercice 6** (Solution : 6) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . On appelle **hyperplan** tout sous-espace vectoriel de

dimension  $n - 1$ . Soient  $H$  et  $H'$  deux hyperplans de  $E$ . Montrer que  $\dim(H \cap H') \in \{n - 2, n - 1\}$ .

**Exercice 7** (Solution : 7) Dans  $\mathbb{R}^n$ , montrer que

$$\text{Vect}((1, \dots, 1)) \quad \text{et} \quad \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$$

sont supplémentaires.

**Exercice 8** (Solution : 7) Soit  $A = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On définit :

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = nX\} \quad \text{et} \quad G = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 9** (Solution : 7) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$  de  $E$  et  $x \in E$  un vecteur non nul. Montrer que :

$$E = F \oplus \text{Vect}(x) \iff x \notin F.$$

**Exercice 10** (Solution : 7) Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

1. Montrer que si  $u$  est surjective, alors  $m \leq n$ .

2. Montrer que si  $u$  est injective, alors  $m \geq n$ .
3. Que peut-on dire si  $u$  est un isomorphisme?

**Exercice 11** (Solution : 8) Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$  définie pour tout  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  par  $u(X) = AX$ , où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base et la dimension de  $\text{Ker}(u)$ .
2. Donner le rang de  $u$ .
3. Donner une base de  $\text{Im}(u)$ .

**Exercice 12** (Solution : 8) Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux formes linéaires **non nulles** sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(\phi) \subset \text{Ker}(\psi)$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\psi = \lambda\phi$ .
2. Dans ce cas, démontrer que  $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\psi)$ . Quelle est leur dimension?
3. On suppose qu'il n'y a pas d'inclusion entre les deux noyaux. Soit  $u$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = (\phi(x), \psi(x)).$$

Montrer que  $u$  est linéaire.

- Montrer que  $u$  est surjective.
- Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(\phi) \cap \text{Ker}(\psi)$ .
- En déduire  $\dim(\text{Ker}(\phi) \cap \text{Ker}(\psi))$ .

## 2. PROJECTEURS, SYMÉTRIES

**Exercice 13** (Solution : 9) Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$f(x, y) = (2y - 3x, 4y - 6x).$$

Montrer que  $f$  est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 14** (Solution : 9) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  représenté dans la base canonique par la matrice  $A =$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que  $f$  est un projecteur.
- Déterminer ses éléments caractéristiques ( $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ ).
- Le projecteur  $f$  est-il bijectif?

**Exercice 15** (Solution : 9) Soit  $E$  un espace vectoriel et soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur de  $E$ .

- Redémontrer que  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ .
- Montrer que  $2p - \text{id}_E$  est une symétrie.

**Exercice 16** (Solution : 10) Soit  $E$  un espace vectoriel et  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie de  $E$ .

- Montrer que  $\frac{1}{2}(s + \text{id}_E)$  est un projecteur.
- En déduire que  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 17** (Solution : 10) Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p \circ q = 0$ . Montrer que  $r = p + q - q \circ p$  est un projecteur de noyau  $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$  et d'image  $\text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ .

**Exercice 18** (Solution : 10)

- Soit  $p$  un projecteur en dimension finie. En écrivant la matrice de  $p$  dans une base adaptée, montrer que  $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$ .
- Soit  $s$  une symétrie d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . En écrivant la matrice de  $s$  dans une base adaptée, montrer que  $-n \leq \text{Tr}(s) \leq n$ . Montrer que :

$$\text{Tr}(s) = n \iff s = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{Tr}(s) = -n \iff s = -\text{id}_E.$$

**Exercice 19** (Solution : 11) Soient  $p$  et  $q$  deux projections de  $E$  de même image  $F$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On pose  $u = (1 - \lambda)p + \lambda q$ . Montrer que  $u$  est un projecteur d'image  $F$ .

**Exercice 20** (Solution : 11) Soit  $p$  un projecteur de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $p$  et  $f$  commutent si et seulement si  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont stables par  $f$ .

**Exercice 21** (Solution : 11) Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs sur  $E$  tels que  $p \circ q = q \circ p$ .

1. Montrer que  $p \circ q$  est un projecteur.
2. Montrer que  $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$ .
3. Montrer que  $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$ .

**Exercice 22** (Solution : 12) Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p + q = \text{id}_E$ . Montrer que  $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ .

**Exercice 23** (Solution : 12) Soient  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\}$ ,  $G = \text{Vect}((1, 2, 2))$  et  $H = \text{Vect}((2, 1, 1))$ .

1. Montrer que  $G$  et  $H$  sont deux supplémentaires distincts de  $F$  dans  $E$ .
2. Déterminer la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ , puis la projection sur  $H$  parallèlement à  $F$ .

3. Déterminer la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , puis la projection sur  $F$  parallèlement à  $H$ .

### **Temporary page!**

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X now knows how many pages to expect for this document.