

TD 16 - Polynômes

1. GÉNÉRALITÉS

Exercice 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(x^3 + x^2 + x + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^k = x^{2n+3} + x^{2n+1} + x^2 + 1$$

Exercice 2 Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient de plus bas degré de chacun des polynômes suivants :

1. $P(x) = x^4 - x^2(x-1)(x-2)$
2. $P(x) = (x-2)^n$
3. $P(x) = (x-1)^7 - (x+1)^7$
4. $P(x) = \prod_{j=0}^n (x-j)$

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les dérivées successives du polynôme $P(x) = (x-a)^n$.

Exercice 4 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P \circ P = P$. On pourra commencer par chercher le degré de P .

Exercice 5 En utilisant les degrés, déterminer les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2$ tels que $Q^2(x) = xP^2(x)$.

2. RACINES

Exercice 6 Trouver les racines du polynôme $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ sachant qu'il admet une racine double.

Exercice 7 On considère le polynôme $P(x) = x^5 - 11x^3 + 11x^2 + 8x - 4$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2.

Exercice 8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $(x-1)^3$ divise :

$$P(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$$

Exercice 9 On souhaite déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant $P(x-1) = P(x)$.

1. Traiter d'abord le cas où le degré de P est impair. Prouver que P admet au moins une racine réelle.
 2. Montrer que P admet une infinité de racines et conclure.
 3. Traiter le cas général en observant que $P'(x-1) = P'(x)$. En déduire la nature de P .
2. En déduire une primitive de la fonction f définie sur $] -2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 2}$$

3. FACTORISATION

Exercice 10 Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ les polynômes suivants :

1. $P(x) = x^4 + 1$
2. $P(x) = x^3 - 2$

Exercice 11 Sachant qu'il admet des racines multiples, factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme :

$$P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1$$

4. APPLICATIONS

Exercice 12

1. Déterminer les réels a, b, c, d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 + 1 = (ax^2 + bx + c)(x + 2) + d$$

Exercice 13 On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 - x - 6$. Montrer que $P(A) = 0_2$.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. On admet qu'il existe des réels a_n, b_n et un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = Q_n(x)P(x) + a_nx + b_n$$

3. En évaluant cette égalité en des valeurs judicieuses de x , déterminer a_n et b_n .
4. Justifier l'égalité $A^n = a_nA + b_nI_2$.
5. En déduire l'expression explicite de la matrice A^n .

5. INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts de I .

Théorème 1

Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(a_i) = f(a_i)$$

De façon équivalente, pour tous réels $b_1, \dots, b_n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(a_i) = b_i$$

Un tel polynôme s'appelle le **polynôme interpolateur de Lagrange** de f aux points a_i .

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit sur I la fonction L_i par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

Montrer que L_i est une fonction polynomiale et préciser son degré.

2. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $L_i(a_k)$.
3. Vérifier que le polynôme $P(x) = \sum_{i=1}^n f(a_i)L_i(x)$ convient.

4. Soit Q un autre polynôme convenant. En étudiant les racines de $P - Q$, montrer que $Q = P$. Conclure.
5. Montrer que sans la contrainte sur le degré ($\deg P \leq n-1$), l'unicité n'est plus garantie.
6. **Application pratique :** Déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction $x \mapsto r^x$ (où $r \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé) aux points $\{1, \dots, n\}$. Calculer ensuite $P(n+1)$.

6. ALGÈBRE LINÉAIRE ET POLYNÔMES

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$. Montrer que :

$$F = \left\{ P \in E \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(1)$$

sont supplémentaires dans E .

Exercice 15 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[x]$ par $f(P) = P(x+1)$.

- Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
- Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.
- Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application u sur $E = \mathbb{R}_n[x]$ par :

$$\forall P \in E, \quad u(P) = P(x+1) - P(x)$$

1. Montrer que si $u(P) = 0$ et si P admet au moins une racine alors P en admet une infinité.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
3. Déterminer $\text{Ker } u$.
4. En déduire $\text{rg}(u)$.
5. Montrer que $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Exercice 17 Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad u(P) = P(x) - xP'(x)$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
3. Déterminer $\text{Ker } u$.
4. En déduire le rang de u .

Exercice 18 Soit $n \geq 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ sa base canonique. Pour tout polynôme $P \in E$, on pose :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}x(1-x)P' + xP$$

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.
b) Calculer $\varphi(x^n)$.
c) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de A .
3. a) L'endomorphisme φ est-il injectif? Justifier.
b) Soit P un polynôme non nul de $\text{Ker}(\varphi)$. Montrer que 1 est l'unique racine de P et que $\deg P = n$.
c) En déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 19 Soit $n \geq 0$ un entier et $E = \mathbb{R}_{2n+1}[x]$. On définit $u : P \in E \mapsto x^{2n+1}P\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que u est une symétrie et déterminer ses espaces caractéristiques.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_{2n+1}[x]$. On pose f l'application qui à $P \in E$ associe $f(P)$ définie par :

$$f(P)(x) = x^{2n+1}P\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Montrer que f est une symétrie.
3. Déterminer $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u l'application définie sur $E =$

$\mathbb{R}_n[x]$ par :

Exercice 22 ENS 2026

$$\forall P \in E, \quad u(P)(x) = P(x+1) - P(x).$$

1. Montrer que si $u(P) = 0$, alors P est un polynôme constant. (*Indication : montrer que si P admet une racine, il en admet une infinité.*)
2. En déduire $\text{Ker}(u)$.
3. En déduire $\text{rg}(u)$.
4. Montrer que $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.