CHAPITRE 21

Dérivées successives, formules de Taylor

1. DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Définition 1 | Dérivées successives en un point

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f' est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$ on dit que f est deux fois dérivable en I et on note $(f')'(x) = f''(x)$.
Par récurrence si n est un entier naturel supérieur à 2, on dit que f est n fois dérivable si f est $n-1$ fois dérivable et si sa dérivée $(n-1)$-ième est dérivable en x_0.
On notera alors $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ la dérivée n-ième ou dérivée d'ordre n de f en x_0

Définition 2 | Dérivées successives

Soit f une fonction sur un intervalle I. On dit qu'elle est n fois dérivable sur I et on note $f \in \mathrm{D}^n(\mathrm{I})$ si elle est n fois dérivable en tout $x \in \mathrm{I}$. La dérivée n-ième de f se note $f^{(n)}$.

Définition 3 | Fonction de classe C^k

Si f est une fonction k fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe C^k et on note $f \in \mathrm{C}^k(\mathrm{I})$.
Si $f \in \mathrm{C}^k(\mathrm{I})$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, on dit que f est de classe C^∞ et on note $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I})$.
On dit aussi de que f est infiniment dérivable.

Vocabulaire

Si en général la fonction $f^{(n)}$ est appelée la **dérivée n-ième** de f, on parle usuelle de **dérivée seconde** pour f'' et parfois de dérivée tierce pour f'''.

Remarque 1.1 — Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$C^{n+1}(I) \subset D^n(I) \subset C^n(I) \text{ et } C^\infty(I) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C^n(I).$$

Exemple 1 — ***Calculs de dérivées n-ièmes***

1. exp est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.
2. Il faut savoir calculer rapidement les dérivées successives des polynômes (qui sont des fonctions de classe C^∞).
3. $\ln \in C^\infty(\mathbf{R})$ et on peut calculer ses dérivées par récurrence.
4. $\cos, \sin$ sont de classes C^∞.
5. Arctan est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
6. On démontrera aussi que tan est de classe C^∞ sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbf{Z}$.
7. Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ pour α non entier sont C^∞ sur $]0, +\infty[$. C'est par exemple le cas de la racine carrée.

2. OPÉRATION SUR LES DÉRIVÉES

Proposition 1

Si f et g sont n fois dérivables (avec $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$) en x_0 alors pour tout réel $\lambda \in \mathbf{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable en x_0 et

$$\left(f^{(n)} + \lambda g^{(n)}\right)(x_0) = f^{(n)}(x_0) + \lambda g^{(n)}(x_0).$$

Corollaire 1

Si f et g sont des fonctions de $C^n(I)$ (resp. $D^n(I)$) alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $f + \lambda g \in C^n(I)$ (resp. $D^n(I)$) et

$$(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}.$$

Exemple 2 — La fonction $x \mapsto e^x + \cos(2x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée 10-ième est donnée par

$$x \mapsto e^x - 2^{10}\cos(2x).$$

Théorème 1 | Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Soit f et g deux fonction n fois dérivables en $x \in \mathbf{R}$. Alors la dérivée n-ième du produit est donnée par

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Corollaire 2

Si f et g sont deux fonctions de classe C^n (resp. dans $\mathrm{D}^n(\mathrm{I})$) sur un intervalle I, alors fg aussi et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Remarque 2.1 — Cette formule est relativement facile à utiliser mais il faut être méthodique :

1. il faut choisir qui sera f et qui sera g,
2. il est utile pour cela de calculer à part et avant les dérivées successives de f et g,
3. enfin, on utilise la formule

Exemple 3 — ***Quelle est la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$?*** Après seulement trois dérivation, la fonction carré donne la fonction nulle, on choisit donc $f(x) = x^2$ pour que la somme s'arrête à k. Ainsi on prend $g(x) = e^x$ et alors toutes les dérivées sont l'exponentielle. La formule de Leibniz donne alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R}, (fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) e^x \\
&= e^x \left(\binom{n}{0} x^2 + \binom{n}{1} 2x + \binom{n}{2} 2 \right) \\
&= e^x \left(x^2 + 2nx + \frac{n(n-1)}{2} 2 \right) \\
&= e^x \left(x^2 + 2nx + n(n-1). \right)
\end{aligned}$$

Proposition 2

Soit $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Soit f et g deux fonction n fois dérivables en $x \in \mathbf{R}$ avec $g(x) \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable en x.

Corollaire 3

Soient $f, g \in \mathrm{C}^n(\mathrm{I})$ (resp. $\mathrm{D}^n(\mathrm{I})$) telles que g ne s'annule par sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathrm{C}^n(\mathrm{I})$ (resp. $\mathrm{D}^n(\mathrm{I})$).

Remarque 2.2 — Pas de formule sympathique ici pour $\left(\frac{f}{g}\right)^{(n)}$.

Remarque 2.3 — Cela s'applique en particulier aux fonctions de la forme $\frac{1}{f}$ où f est n fois dérivable en x et $f(x) \neq 0$.

Exemple 4 — La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\ln(x)}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 3

Soit $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Soit f une fonction n fois dérivable en x et g deux fonction n fois dérivables en $f(x)$ alors $g \circ f$ est n fois dérivable en x.

Corollaire 4

Soient $f \in \mathrm{C}^n(\mathrm{I})$, $g \in \mathrm{C}^n(\mathrm{J})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Alors $g \circ f \in \mathrm{C}^n(\mathrm{I})$.

Remarque 2.4 — Pas de formule sympathique ici pour $(g \circ f)^{(n)}$.

Remarque 2.5 — Encore une fois, cela fonctionne aussi en remplaçant $\mathrm{C}^n(\mathrm{I})$ et $\mathrm{C}^n(\mathrm{J})$ par $\mathrm{D}^n(\mathrm{I})$ et $\mathrm{D}^n(\mathrm{J})$.

Exemple 5 — $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$.

Théorème 2 | Lien dérivées - polynômes

Soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a l'équivalence

$$f^{(n)} \text{ est la fonction nulle} \iff f \in \mathbf{R}_{n+1}[x].$$

Preuve Le sens réciproque a déjà été fait dans le cours sur les polynômes. Pour le sens direct, on part de $f^{(n)}(t) = 0$ et on intègre l'égalité n fois. Cela donne un polynôme de degré maximal n comme on gagne un degré à chaque fois.

3. FORMULES DE TAYLOR

On rappelle la formule de Taylor pour les polynômes : quelque soit $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[x]$ et $a \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Cette formule était vraie car si on comme le degré de P était inférieur à n, alors la dérivée $(n+1)$-ième de de P est nulle.

Pour une fonction f en général, cette formule donne quand même une approximation de la fonction f, mais l'"écart" à la réalité est mesuré par la dérivée $n+1$-ième.

Théorème 3 | Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{I})$ (où I est un intervalle), alors pour tout $(a,x) \in \mathrm{I}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Remarque 3.1 —

1. avec $n=0$, on retrouve l'égalité

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

2. dans le cas général, on parle de "formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$."
3. le terme d'erreur

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

est appelé le **RESTE INTÉGRAL**.

Ce résultat vient prouver une théorème qui était pour l'instant admis dans le chapitre sur les séries.

Proposition 4

Soit $x \in \mathbf{R}$, alors la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge vers e^x.

Preuve On applique la formule de Taylor à l'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ entre 0 et x avec la fonction exp qui est bien de classe C^∞. On obtient

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{\exp^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^n dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{e^t(x-t)^n}{(n-1)!} dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \int_0^x \frac{e^t(x-t)^n}{(n-1)!} dt \right| \leqslant \int_0^x \left| \frac{e^t x^n}{(n-1)!} \right| dt = \int_0^x \frac{e^t |x|^n}{(n-1)!} dt.$$

Pour démontrer la propriété, il nous suffit de montrer que l'intégrale en question tend vers 0. En effet elle est positive et majorée par $\int_0^x \frac{e^{|x|}|x|^n}{(n-1)!} dt = \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n-1)!}$ qui tend bien vers 0 par croissance comparée. (Attention, ici $e^{|x|}$ est une constante).

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'écrire le reste sous une autre forme, ce qui simplifie parfois les démonstrations.

Théorème 4 | Formule de Taylor-Lagrange

Soit $f \in C^\infty(I)$ (où I est un intervalle). Alors pour tout $(x, a) \in I^2$, il existe c compris entre x et a tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Remarque 3.2 —

1. on parle de *formule de Taylor-Lagrange en a à l'ordre $n+1$*.
2. avec $n = 0$, on retrouve qu'il existe $c \in]x, a[$ tel que

   $$f(x) - f(a) = (x-a)f'(c).$$

   C'est exactement le théorème des accroissements finis.

La conséquence la plus pratique de ce théorème est alors immédiate.

Théorème 5 | Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in C^\infty(I)$ (où I est un intervalle). Alors pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\left| f(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k \right| \leqslant \frac{|x-y|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x, y),$$

où $M_{n+1}(x, y)$ est le maximum de $|f^{(n+1)}(z)|$ pour z compris entre x et y.

Exemple 6 — ***Donner une approximation de*** $\cos(1)$ ***à*** 10^{-3} ***près*** On utilisera l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, pour la fonction cos.

EXEMPLES D'EXERCICES

Exemple 7 — ***Démontrer que*** $\ln$ ***est de classe*** $\mathcal{C}^\infty$ ***sur*** $[0, +\infty[$ ***et déterminer ses dérivées successives*** .

Au brouillon, pour se faire une idée de ce qu'il se passe, on calcule les premières dérivées.

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$,
- $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$,
- $\ln^{(3)}(x) = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$,
- $\ln^{(4)}(x) = 2(-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$.

On conjecture alors que $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

Pour la rédaction :

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\ln \in \mathcal{C}^n(]0, +\infty[)$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$, on a bien $\ln \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$. De plus, la formule est vérifiée car pour tout $x > 0$,

$$(-1)^{1-1}\frac{(1-1)!}{x^1} = \frac{1}{x} = \ln'(x).$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que $f \in \mathcal{C}^n(]0, +\infty[)$ et que

$$\forall x > 0, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Cette formule implique que $\ln^{(n)}$ est bien dérivable (donc $f \in \mathcal{D}^{n+1}(]0, +\infty[)$ et on obtient

$$\forall x > 0 \ln^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)\frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n n!\frac{1}{x^{n+1}}.$$

C'est bien la formule voulue. De plus, cette dérivée est bien continue donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Par récurrence, on a montré la propriété pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Cela implique que $\ln \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$

Exemple 8 — *Dérivées successives des fonctions trigonométriques*

Quand on dérive la fonction cos par exemple, on obtient

- $\cos' = -\sin$,
- $\cos'' = -\sin' = -\cos$,
- $\cos^{(3)} = \sin$,
- $\cos^{(4)} = \cos$.

Si on continue, on voit qu'on va boucler. Pour déterminer la dérivée n-ième de cos, il suffit donc de regardé le reste de n par la division euclidienne par 4.

Par exemple,

$$\cos^{18} = (\cos^{16})'' = \cos'' = -\cos\,.$$

Ou encore, si $f : x \mapsto \cos(4x)$, alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, f^{19}(x) = 4^{19}\sin(4x).$$