Thomas Cometx

CHAPITRE 22

# Compléments sur les espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel.

**Remarque 0.1 —** Aucune démonstration n'est exigible dans ce chapitre.

## 1. SOMMES ET INTERSECTIONS

**Proposition 1 | Intersection de deux espaces vectoriels**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , l'ensemble $F \cap G$ est un sous espace vectoriel.

**Remarque 1.1 —** On a la généralisation suivante : si $F_1, \dots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels, alors $\bigcap_{i=1}^{k} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

**Remarque 1.2 —** $F \cap G$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E qui est aussi un sous-espace vectoriel de F et de G.

**Remarque 1.3 —** $F \cap G$ est toujours non vide, car l'intersection contient toujours $0_E$. Si $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que l'intersection est nulle ou réduite à zéro.

**Exemple 1 —** Déterminer dans $\mathbf{R}^3$ l'intersection de $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x+y+z=0\}$ et $F = \text{Vect}(1,1,0),(0,1,1)$ ).

**Définition 1 | Somme de deux sous-espaces vectoriels**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de F et G est l'espace vectoriel

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}.$$

$(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$ est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.

**Définition 4**

Si $E = F \oplus G$, alors la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E, appelée **base adaptée à la somme directe.**

**Théorème 4 | Théorème de la base adaptée**

Si E est un espace vectoriel de dimension finie qui s'écrit comme une somme directe de deux sous-espaces vectoriels $E = F \oplus G$. Alors il existe une base de E adaptée à la somme directe.

**Exemple 8 —** Après avoir démontré que les espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, donner une base adaptée à la somme directe

$$\mathbf{R}^4 = \text{Vect}((1,1,1,1)) \oplus \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, x+y+z+t=0\}.$$