

# Développements limités

## 1. DÉFINITION

### Définition 1 | Développement limité

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage d'un réel  $x_0$ . On dit que  $f$  admet un développement limité en  $x_0$  (ou au voisinage de  $x_0$ ) à l'ordre  $n$  s'il existe des réels  $a_0, \dots, a_n$  tels qu'au voisinage de  $x_0$ ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Autrement dit, il existe des réels  $a_0, \dots, a_n$  tels qu'au voisinage de  $x_0$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où  $\epsilon$  est une fonction qui tend vers 0 en  $x_0$ .

Σ

### Vocabulaire

La partie

$$\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

est appelée **partie régulière du développement limité**. Les réels  $a_0, \dots, a_n$  sont appelés les **coefficients du développement limité**.

**Remarque 1.1** — Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$ . Alors par définition  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  tend vers  $f'(x_0)$  lorsque  $x$  tend vers 0. Posons alors  $a_0 = f(x_0)$  et  $a_1 = f'(x_0)$ . Regardons la quantité  $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ . On a

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} - a_1.$$

Par définition de la dérivée,  $\frac{f(x)-a_0}{x-x_0}$  tend vers  $a_1$  en  $x_0$ , donc la différence tend vers 0. Ainsi le quotient

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{x - x_0}$$

tend vers 0, ce qui signifie que  $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) = o_{x_0}(x - x_0)$ . Ainsi

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Cela justifie que toute fonction dérivable en  $x_0$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $x_0$ . Celui-ci est donné par  $a_0 = f(x_0)$  et  $a_1 = f'(x_0)$ .

**Exemple 1** — Donner un développement limité des fonctions suivantes en 0, à l'ordre 1

1.  $\exp$ ,
2.  $\sin$ ,
3.  $\cos$ ,
4.  $x \mapsto \ln(1 + x)$ .

### Théorème 1 | Unicité du développement limité

Si une fonction  $f$  admet un développement limité en  $x_0$  à l'ordre  $n$ , alors celui-ci est unique. C'est à dire que si  $a_0, \dots, a_n$  et  $b_0, \dots, b_n$  sont des réels qui donnent le DL, alors pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $a_k = b_k$ .

## 2. OPÉRATION SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

### Proposition 1 | Somme de DL

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions qui admettent un DL à l'ordre  $n$  en  $x_0$ , alors  $f + g$  aussi. De plus, le DL de  $f + g$  est donné en faisant la somme des parties régulières de ceux de  $f$  et  $g$ . En d'autres termes, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ et}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)(x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

**Exemple 2** — Si  $f(x) = 5 + 4(x - x_0) - 2(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$  et  $g(x) = -1 + 2(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$ , quel DL de  $f + g$  peut on donner en  $x_0$  ?

**Proposition 2 | Produit de DL**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions qui admettent un DL à l'ordre  $n$  en  $x_0$ , alors  $f \times g$  aussi. De plus, le DL de  $f \times g$  est donné en faisant le produit des parties régulières de ceux de  $f$  et  $g$ , puis en tronquant la somme au degré  $n$ .

**Exemple 3** — (Pour  $x_0 = 0$ ). Si  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o_0(x^2)$  et  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + o_0(x^2)$ . On fait alors le produit en remarquant que  $x^\alpha o_0(x^\beta) = o_0(x^{\alpha+\beta})$ . Dès qu'un terme est de degré supérieur ou égal à 2, on ne le prend pas en compte!. On obtient

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + o(x^2) \\ + \text{des termes de degré supérieur à deux}$$

### 3.

## FORMULE DE TAYLOR-YOUNG DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

**Théorème 2 | Formule de Taylor-Young**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $x_0$ . Alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , elle admet un développement limité en  $x_0$  et celui-ci est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

**Remarque 3.1** — Pour des petits ordres cela, donne :

1. ordre 0 :  $f(x) = f(x_0) + o_{x_0}(1)$  (parfaitement inutile)
2. ordre 1 :  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$
3. ordre 2 :  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$ .

On continue le cours par une liste de DL usuels (à connaître). Ce sont tous des DL en  $x_0 = 0$ .

**Exponentielle et logarithme** Les fonctions exp et ln sont de classe  $C^\infty$  sur leur ensemble de définitions, elles admettent donc des développements limités.

**Proposition 3 | DL de l'exponentielle**

La fonction exponentielle admet un DL en 0 à tous les ordres. A l'ordre  $n$  il est donné par

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

**Proposition 4 | DL de ln**

Les fonctions  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto \ln(1-x)$  admettent des DL en 0 à tous les ordres. A l'ordre  $n$  ils sont donnés par

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n)$$

et

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o_0(x^n).$$

**Remarque 3.2** — On pourra les retenir sous la forme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_0(x^n)$$

et

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o_0(x^n).$$

**Exemple 4** — Déterminer la limite en 0 de l'expression

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)}.$$

**Les fonctions trigonométriques.** Les fonctions cos et sin sont  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ . Elles admettent donc des DL en tout point et à tout ordre. On retiendra les DL en zéro.

**Proposition 5 | DL de cos et sin**

Les DL de cos et sin à l'ordre  $n$  en zéro sont donnés par

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^n),$$

et

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^n).$$

**Remarque 3.3** — Pour les retenir :

- Pour cos, on prend la partie paire du DL de l'exponentielle. Pour sin, la partie impaire.
- Dans les deux cas, on alterne les signes.

**Exemple 5** — Par exemple, le DL à l'ordre 7 de sin est donné par

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o_0(x^7) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{720} + o_0(x^7). \end{aligned}$$

Remarque intéressante, c'est aussi son DL à l'ordre 8 car le terme de degré 8 est nul : on peut remplacer  $o(x^7)$  par  $o_0(x^8)$ .

Le DL de cos à l'ordre 2 est lui donné par

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2).$$

**Remarque 3.4** — On pourra retenir

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$$

et

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

**Exemple 6** — Déterminer la limite de  $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$  lorsque  $x$  tend vers 0.

**Les fonctions puissances** Les fonctions  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$ . Elles admettent donc des DL de tout ordre.

**Proposition 6**

Les fonctions puissances  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \neq 0$  admettent en 0 un DL de tout ordre. Si  $n \in \mathbb{N}$  est fixé, le DL d'ordre  $n$  est donné par

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n).$$

**Corollaire 1**

En particulier, il faut savoir reconnaître et utiliser les DL :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n).$$

On utilisera aussi le début du DL suivant :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

**Remarque 3.5** — La composition des DL n'est pas au programme, mais on peut "substituer" une variable dans un DL. Par exemple, en substituant  $x$  par  $x^2$  dans le dernier DL on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2n}),$$

ce qui donne un DL à l'ordre  $2n$  et  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ .

## 4. APPLICATIONS

Afin de présenter des applications très utiles des développements limités, on présente le résultat suivant.

**Théorème 3**

Si  $f$  admet un développement limité en  $x_0$  donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(x^n) \text{ avec au moins un terme non nul,}$$

alors, si  $a_k$  est le premier terme non nul du DL on a

$$f(x) \sim_{x_0} a_k (x - x_0)^k.$$

**4.1. Positions relatives de courbes**

Le développement limité d'une fonction donne l'allure de sa courbe représentative! Très logiquement, la tangente à la courbe est donnée par l'équation

$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Ce qui va nous intéresser désormais est la position relative de la courbe par rapport à cette tangente. Pour cela on regardera le premier terme non nul (s'il existe) dans le développement limité. On supposera désormais que  $f$  admet en  $x_0$  un DL

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o_{x_0}(x^k).$$

La position par rapport à la tangente est alors donnée par le signe de  $a_k$  : pour cela on regarde la quantité

$$f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o_{x_0}(x^k)$$

ce qui donne

$$f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \sim_{x_0} a_k(x - x_0)^k.$$

**Théorème 4**

Sous les hypothèses précédentes :

1. Si  $k$  est pair, la courbe  $C_f$  et la tangente ont la même position relative des deux côtés.
  - Si  $a_k > 0$ , la courbe est au dessus.
  - Si  $a_k < 0$  elle est en dessous.
2. Si  $k$  est impair la courbe  $C_f$  et la tangente ont des positions relatives différentes des deux côtés.

- Si  $a_k > 0$ , la courbe est au dessus à droite et en dessous à gauche.
- Si  $a_k < 0$ , la courbe est au dessous à droite et en dessus à gauche.

### Exemple 7 — *Sinus et cosinus en 0*

1. Le développement limité de  $\cos$  en 0 donne

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Cela donne une tangente en 0 horizontale d'équation  $y = 0x + 1 = 1$ . De plus  $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$  donc le premier terme prépondérant de la différence est toujours positif, donc des deux cotés, la courbe est sous la tangente.

2. Le développement limité de  $\sin$  en 0 donne

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 0 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Cela donne une tangente en 0 horizontale d'équation  $y = x$ . De plus  $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$  donc le premier terme prépondérant **change de signe**, donc la courbe sera de part et d'autre de la tangente au voisinage de 0. Si  $x > 0$ , la différence est négative, donc la courbe est sous la tangente. Si  $x < 0$ , c'est le contraire.

## 4.2. Calcul de limites et recherche d'équivalents

Les développements limités permettent d'obtenir des limites pour lesquelles les équivalents usuels n'étaient pas assez précis. C'est utile quand on a une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Par exemple, comment déterminer la limite de  $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$  en 0. On remplace  $\sin(x)$  par son DL et on obtient

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3)}{x^3} = -\frac{x^3}{6x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

Donc la limite est  $-\frac{1}{6}$ .

**Exemple 8** — Soit  $a_n$  une suite qui tend vers 0 (sans prendre la valeur 0). Déterminer la limite de  $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$ .

Si on n'obtient pas forcément de limite, on peut tout de même obtenir un équivalent. Par exemple, étant donné que  $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$  tend vers 0, on peut déduire que  $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$  tend vers 0. On peut se demander par quel signe et à quelle vitesse. Le DL nous donne

$$\frac{\sin(x) - x}{x^2} = \frac{-x^3}{6x^2} + \frac{o(x^3)}{x^2} = -\frac{x}{6} + o(x).$$

On en déduit donc que  $\frac{\sin(x)-x}{x^2} \sim -\frac{x}{6}$ .

**Exemple 9** — Afin de calculer les limites, il ne faut pas hésiter à faire de petit changement de variable. Par exemple, en réalisant le changement de variable  $1+h=x$ , on peut déterminer la limite en  $1^+$  de

$$\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}.$$

(Remarque : sans faire de changement de variable ici, on peut s'en sortir avec la formule de Taylor-Young.)

### 4.3. Développements asymptotiques, asymptotes oblique

Pour certains fonctions, on pourra déduire d'un développements limité ce qu'on appelle un **développements asymptotique**. En toute généralité, si une fonction  $f$  admet un DL d'ordre  $n$  en zéro que l'on notera

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^k)$$

alors la fonction  $g : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  vérifiera

$$g(x) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{x^k} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

C'est ce qu'on appelle un le développement **asymptotique d'une fonction**. On s'intéressera surtout à un cas particulier, le cas des **asymptotes obliques**.

#### Définition 2 | Asymptote oblique

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[m, +\infty[$ , on dit que la courbe représentative  $(C_f)$  de  $f$  admet un asymptote oblique en  $+\infty$  s'il existe  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Son asymptote oblique est alors la droite d'équation  $y = ax + b$ .

**Remarque 4.1** — Cette définition fonctionne en  $-\infty$  en faisant les changements qui s'imposent.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax - b = 0$$

revient à dire que

$$f(x) = ax + b + o_{x \rightarrow +\infty}(1).$$

Pour obtenir **la position relative de  $(C_f)$  par rapport à l'asymptote**, il faut préciser ce  $o(1)$  : on va chercher une fonction  $h$  de signe connu, et tendant vers 0 tel que

$$f(x) = ax + b + h(x) + o_{x \rightarrow +\infty}(h(x)).$$

Si  $h$  est positive, alors la courbe de la fonction sera au-dessus de l'asymptote, et  $h$  est négative elle sera en dessous.

Même dans le cas où  $h$  change de signe une infinité de fois, on peut dire que la courbe traverse l'asymptote une infinité de fois!

**Exemple 10** — *Trouver l'asymptote oblique en  $+\infty$  de la courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$*

**Exemple 11** — *Trouver l'asymptote oblique en  $+\infty$  de la courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$*