

Espaces probabilisés

Le but de chapitre est de généraliser ce que l'on a vu au premier semestre sur les probabilités dans un espace fini. Si nous nous concentrerons par la suite sur les probabilités à dans un espace dénombrable (comme \mathbb{N}), puis en deuxième année sur les probabilités continues, nous devons étudier ce cadre général qui nous fournira beaucoup de théorèmes utiles dans chacun des cadres particuliers.

1. ESPACES PROBABILISÉS

Définition 1 | Univers

L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** et est noté Ω .

Exemple 1 —

1. Tous les exemples vus au premier semestre en probabilités finies fournissent des exemples.
2. Si l'expérience consiste au choix d'un nombre aléatoire uniforme dans $[0, 1]$, alors $\Omega = [0, 1]$.
3. On lance une pièce une infinité de fois et on regarde le résultat Pile ou Face. Dans ce cas $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans Pile/Face.

Définition 2 | Ensemble des événements

Pour étudier les variables aléatoires dans un cadre plus général que les probabilités finies, on doit définir un ensemble des événements. Celui ci est noté \mathcal{A} et est un ensemble de parties de Ω . Il doit vérifier les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. **(Stabilité par passage au complémentaire)** Si $B \in \mathcal{A}$, alors $\bar{B} \in \mathcal{A}$,
3. **(Stabilité par union dénombrable)** Une union dénombrable d'événements est un événements : si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille quelconque de \mathcal{A} , alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$.
4. **(Stabilité par intersection dénombrable)** : si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de \mathcal{A} ,

alors $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.1 — Cette définition est atroce, mais ainsi est faite la dure vie d'un probabiliste.

Remarque 1.2 — Les probabilistes ont le droit d'appeler un ensemble de parties vérifiant ces propriétés une **tribu**, mais vous n'avez le droit.

Remarque 1.3 — Sur une note plus douce, on remarquera que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ convient toujours. On travaillera souvent avec $\Omega = \mathbb{N}$ ou $\Omega = \mathbb{N}^*$, et dans ce cas c'est ce choix de \mathcal{A} qui sera fait.

Définition 3 | Probabilité

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et \mathcal{A} un ensemble d'événements. Une **probabilité** P est une application définie sur \mathcal{A} et à valeur dans $[0, 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. (**σ -additivité**) (sigma additivité) Si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux disjoints alors

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(B_i).$$

On retrouve les propriétés de calcul que l'on avait sur les probabilités finies.

Proposition 1

1. Soit A un événement, alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2. Soient A et B deux événements, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque 1.4 — Cela implique que si (A_n) est une suite d'événements,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

(où la somme de droite est éventuellement divergente vers $+\infty$).



Vocabulaire

On dit que (Ω, \mathcal{A}, P) est un **espace probabilisé**.

Exemple 2 — Montrer que si P est défini par $P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, alors $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$ est un espace probabilisé. Déterminer $P(\{2n, n \in \mathbb{N}\})$ et $P(\{2n+1, n \in \mathbb{N}\})$.

2. THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE ET CONSÉQUENCES

Le théorème suivant, et ses conséquences, seront très utiles pour démontrer certaines propriétés des expériences aléatoires. Dans cette partie on fixe (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Remarque 2.1 — Soit (A_n) une suite d'événements. On rappelle qu'elle est dite **croissante pour l'inclusion** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

Elle est dite **décroissante pour l'inclusion** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n.$$

Théorème 1 | Théorème de la limite monotone

1. Soit (A_n) une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

2. Soit (A_n) une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

On utilisera aussi les conséquences suivantes en exercice :

Corollaire 1

Soit (B_n) une suite d'événements, alors

1.

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right)$$

2.

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n B_k\right)$$

Remarque 2.2 — Les démonstrations de ces résultats ne sont pas exigibles, et l'esprit des concours est souvent plutôt de savoir les appliquer dans des contextes comme celui de l'exemple suivant.

Exemple 3 — On considère une expérience de lancers successifs d'une pièce qui s'arrêtent au premier Face obtenu. On compte le nombre de lancers faits avant de s'arrêter. On appelle A_n l'événement "obtenir un pile au n -ième lancer". Alors l'événement "obtenir une infinité de Pile" s'écrit $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$. Par le théorème de la limite monotone,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n P(A_k) \text{ par indépendance} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a ainsi une probabilité 0 de ne pas s'arrêter, donc une probabilité 1 de s'arrêter!

3. QUELQUES ÉVÉNEMENTS PARTICULIERS

Définition 4 | Événement négligeable

Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit **négligeable** si $P(A) = 0$.

Exemple 4 — Reprenons l'exemple du lancer infini de pièce : l'événement "obtenir une suite infinie de Pile" est négligeable car on a vu qu'il est de probabilité 0.

Proposition 2

Une union dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Définition 5 | Événement presque sûr

Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit **presque sûr** si $P(A) = 1$.

Proposition 3

Une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

Exemple 5 — On considère un lancer infini de Pile ou Face, alors l'événement "obtenir au moins un Pile et un Face" est presque sûr. En effet on note A_n l'événement

”obtenir un pile au n -ième lancer”, on a vu que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 0.$$

De même on montre que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right) = 0.$$

L'événement B ”obtenir au moins un Pile et un Face” est l'événement contraire de

$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)$$

qui est de probabilité 0. Donc $P(B) = 1$.

Définition 6 | Propriété vraie presque sûrement

Soit Q une propriété dépendant de $\omega \in \Omega$. On dit qu'elle est **vraie presque sûrement** s'il existe un événement presque sûr A tel que si $\omega \in A$, alors $Q(\omega)$ est vraie.

4. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Définition 7 | Probabilité conditionnelle

Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque. Alors la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ (qu'on lit ”la probabilité de B sachant A ” est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Proposition 4

Soit A un événement de probabilité non nulle, alors l'application

$$P_A : B \in \mathcal{A} \mapsto P_A(B)$$

est une probabilité. Ainsi $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

Théorème 2 | Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_n$ un système complet d'événements non négligeables. Alors pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Exemple 6 — On lance une pièce jusqu'à obtenir un Pile. Si à la fin, on a fait un nombre impair de lancers, alors on a gagné. Sinon on lance un dé et on gagne si et seulement si on obtient six. Quelle est la probabilité de gain?

Définition 8 | Événements mutuellement indépendants

Soit (A_n) une suite d'événements. On dit qu'ils sont **mutuellement indépendants** si pour tout sous ensemble **fini** $J \subset \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Remarque 4.1 — En particulier, cela implique que si les (A_n) sont mutuellement indépendants,

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.