Thomas Cometx

CHAPITRE 26

Intégrales généralisées

1. DÉFINITIONS

1.1. Cas des intervalles semi-ouverts

Dans cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Les résultats se généralisent aisément sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$

Définition 1 | Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt \text{ existe et est finie.}$$

On note alors cette limite

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Cette intégrale s'appelle une **intégrale impropre en** b ou **intégrale généralisée**. Si elle ne converge pas on dit qu'elle est divergente

Vocabulaire

Les quantités

$$\int_a^x f(t)dt$$

s'appelle les **intégrales partielles**.

Exemple 1 — Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$.

2. $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$.
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$.
4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.
5. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$.

1.2. Cas des intervalles ouverts

Dans cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Définition 2 | Intégrales convergente sur un intervalle ouvert

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ est une intégrale convergente s'il existe un $c \in]a, b[$ tel que les intégrales

$$\int_a^c f(t) dt \text{ et } \int_c^b f(t) dt$$

sont convergentes. Dès lors on définit

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Dans le cas cas contraire, on dit que l'intégrale est **divergente**.

Remarque 1.1 —

1. La **relation de Chasles** assure que la quantité ne dépend pas du choix de c.
2. En pratique, on se ramènera à une étude locale de la fonction autour des bornes.

Attention

On **ne peut pas** vérifier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ en regardant

$$\int_{-x}^{x} f(t) dt.$$

Regardez par exemple avec $f(t) = t$.

Exemple 2 — Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.

2. OPÉRATION SUR LES INTÉGRALES CONVERGENTES

Attention

Dans tout le chapitre, on présentera maintenant les résultats pour f continue sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$. Tout ces résultats s'adaptent dans les cas de $]a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b < +\infty)$ ou $[a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$.

Dans cette partie on généralise les propriétés habituelles des intégrales sur des segments à des intégrales généralisés. On énonce aussi les conditions **indispensables** à l'utilisation de ces propriétés. Si elles ne sont pas vérifiées, on s'expose à l'écriture de grosses erreurs.

2.1. Linéarité

Théorème 1 | Linéarité de l'intégrale

Si f est g sont deux fonctions d'intégrales convergentes (ou intégrables) sur un intervalle $]a, b]$ (ou $[a, b[$ ou $]a, b[$) et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est intégrable et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\, dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

Attention

On ne peut pas séparer ainsi des intégrales impropres sans avoir vérifié les convergences **avant**. Sinon on pourrait écrire

$$\int_0^1 0\, dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\right) dt = \int_0^1 \frac{1}{t} dt - \int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

alors que la quantité

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt \text{ n'existe pas.}$$

Remarque 2.1 — L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b[$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.2. Relation de Chasles

Théorème 2 | Relation de Chasles

Soit $c \in [a,b[$ et f une fonction continue sur $[a,b[$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge si et seulement si } \int_c^b f(t)dt \text{ converge}$$

et alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

2.3. Positivité, croissance

Théorème 3 | Positivité de l'intégrale

Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b[$ d'intégrale convergente, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$

Corollaire 1 | Croissance de l'intégrale

Si f et g sont deux fonctions continues $[a,b[$ d'intégrales convergentes telle que $f \leqslant g$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$$

Théorème 4

Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b[$ d'intégrale convergente, alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \iff f \text{ est nulle.}$$

3. INTÉGRALES DES FONCTIONS POSITIVES

3.1. Théorèmes d'intégrabilité

Théorème 5

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si l'application

$$x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée.}$$

Théorème 6 | Intégrabilité par comparaison

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ positives au voisinage de b alors si $f \leqslant g$ au voisinage de b alors si l'intégrale de g est convergente, celle de f l'est aussi.

On utilisera souvent ce critère de la façon suivante.

Corollaire 2

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que pour tout $x \in [a, b[, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Alors,
1. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ aussi.
2. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ aussi.

Théorème 7 | Intégrabilité par équivalence

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ positives au voisinage de b, alors si $f \sim g$ en b alors

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge} \iff \int_a^b g(t)dt \text{ converge.}$$

Remarque 3.1 — Le cas des fonctions négatives est analogue : soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ négatives au voisinage de b alors

1. si $f \geqslant g$ au voisinage de b alors si g est intégrable, f l'est aussi,
2. si $f \sim g$ en b alors f est intégrable si et seulement si g l'est.

Attention

La condition de signe est fondamentale dans ces théorèmes.

3.2. Convergence absolue

Définition 3

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$, on dit que l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge absolument si l'intégrale } \int_a^b |f(t)|dt$$

converge.

Théorème 8

Si une intégrale est absolument convergente alors elle est convergente et on a **l'inégalité triangulaire**

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Remarque 3.2 — Théorème admis.

Théorème 9 | Intégrabilité par négligeabilité

Soient g et f deux fonctions continues sur $[a,b[$, avec g positive voisinage de b et que $f = o_b(g)$ en b. Alors si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)$ converge.

Il existe aussi un version de ce résultat avec une conclusion négative.

Proposition 1

Soient g et f deux fonctions continues positives sur $[a,b[$, telles que que $f = o_b(g)$ en b. Alors si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b f(t)$ diverge.

Remarque 3.3 — Le théorème fonctionne aussi avec deux fonctions négatives. L'important est que f et g aient un signe constant au voisinage de b.

4. INTÉGRALES DE RÉFÉRENCE

Les théorèmes précédents s'apprécient en s'appliquant à l'aide des fonctions suivantes, considérées comme des fonctions de référence.

Proposition 2 | Intégrales de Riemann

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Corollaire 3

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$ est est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

L'application suivante est fondamentale pour les exercice.

Théorème 10 | Critère (d'équivalence) de Riemann pour les intégrales

1. Soit $f \in C([1,+\infty[)$ telle qu'il existe $C \in \mathbf{R}^*$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) \sim_{+\infty} \frac{C}{x^\alpha}$, alors

   $$\int_1^{+\infty} f(t)dt \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

   On a le même critère en $-\infty$.
2. Soit $f \in C(]a,b])$ (avec $a \in \mathbf{R}$) telle qu'il existe $C \in \mathbf{R}^*$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) \sim_a \frac{C}{|x-a|^\alpha}$, alors

   $$\int_a^b f(t)dt \text{ converge } \iff \alpha < 1.$$

Théorème 11 | Critère de Riemann - version "petit o"

1. Soit $f \in C([1,+\infty[)$ telle que $\lim_{x\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ pour un certain $\alpha > 1$ (cela revient à dire que $f(x) = o_{+\infty}(\frac{1}{x^\alpha})$), alors

   $$\int_1^{+\infty} f(t)dt \text{ converge .}$$

   Cela fonctionne par exemple si $\lim_{x\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ et on a le même critère en $-\infty$.
2. Soit $f \in C(]a,b])$ (avec $a \in \mathbf{R}$) telle que $\lim_{x\to a} |t-a|^\alpha f(t) = 0$ pour un certain $\alpha < 1$ (cela revient à dire que $f(x) = o_a(\frac{1}{|x-a|^\alpha})$), alors

   $$\int_a^b f(t)dt \text{ converge .}$$

   Cela fonctionne en particulier si $\sqrt{|x-a|}f(t) \to 0$.

Pour les probabilités de deuxième année, il faudra bien connaitre l'intégrale suivante.

Proposition 3 | Exponentielles

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente si et seulement si $a > 0$.

Proposition 4 | Logarithme

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente et

$$\int_0^1 \ln(t) = -1$$

5. EN PRATIQUE : COMMENT MONTRER QU'UNE INTÉGRALE EST CONVERGENTE

On retiendra la méthode suivante pour montrer qu'une intégrale est convergente.

1. On vérifie que la fonction est continue (ou continue par morceaux) sur l'intervalle ouvert.
2. On regarde les bornes : sur lesquelles l'intégrale est-elle impropre ? Si une borne est infinie, il faut toujours la traiter. Si elle est finie il faut la traiter si la fonction n'est pas définie en la borne.
3. Pour les **bornes finies** : on a le réflexe de chercher un équivalent. Parfois, la fonction admet une limite et donc se prolonge par continuité (dans ce cas là, c'est gagné, c'est convergent). Sinon on cherche des équivalents de référence (Riemann, logarithme...). On peut aussi utiliser un critère de petit o. Par exemple en calculant $\lim_{x\to a} \sqrt{t}f(t)$.
4. Pour une borne infinie : comme pour les séries, montrer que $f(t)$ tend vers 0 n'apporte rien. Et contrairement aux suites, montrer que $f(t)$ ne tend pas vers 0 n'apporte rien non plus ! On cherche donc un équivalent en $+\infty$ (ou $-\infty$) et à utiliser un critère du type Riemann. Le critère du petit o sera aussi souvent très utile. On cherchera par exemple à montrer que $\lim_{x\to+\infty} t^2 f(t) = 0$. (Très pratique souvent, notamment avec une décroissance exponentielle).

Remarque 5.1 — Si a (ou b) est une borne finie, et que la fonction à intégrer admet une limite en la borne : la fonction se prolonge par continuité en a. On dit que l'intégrale est **faussement impropre en a** et l'intégrale est égale à l'intégrale de la fonction prolongée par continuité.

Exemple 3 — Montrons que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt \text{ est convergente.}$$

6. INTÉGRATION PAR PARTIES

La méthode d'intégration par parties se généralise sous conditions à ces intégrales impropres. Cependant on réalisera toujours une intégration par parties sur des segments, et en suite on passera à la limite.

Méthode *(Faire une intégration par parties sur une intégrale impropre)*

On traite le cas d'une intégrale $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ impropre en a et b (où u et v sont C^1 sur $]a,b[$).

1. On fixe A et B tels que $a < A < B < b$.
2. On réalise l'intégration par parties

$$\int_A^B u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_A^B - \int_A^B u'(t)v(t).$$

3. On passe à la limite dans les deux termes lorsque $A \to a$ et $B \to b$.

Dans le cas où l'intégrale est impropre uniquement en une borne par, il n'y qu'une constante à introduire (par exemple si c'est en la borne inférieure, uniquement A).

Remarque 6.1 — Cette méthode peut être utilisée dans deux objectifs :

1. Montrer que l'intégrale est convergente.
2. Calculer l'intégrale.

Remarque 6.2 — Le choix de la primitive de v' est important ici ! On sait qu'on peut choisir v **à une constante près**. Le choix de cette constante peut rendre le crochet et l'intégrale tous les deux convergents (cas facile), ou alors au contraire donner deux infinis qui "se compensent. Pour s'en convaincre, on regarde l'exemple ci-dessous en prenant deux v différents.

Attention

On ne réalise jamais d'intégration par parties directement, alors on risque de faire apparaître des quantité "infinies" qui se compensent.

Exemple 4 — Pour $a > 0$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t\frac{e^{-at}}{a}dt.$$

7. CHANGEMENT DE VARIABLES

Le changement de variables se généralise aussi.

Théorème 12 | Changement de variable

Soit ϕ une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]\alpha,\beta[$ vers $]a,b[$, alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)dt \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))|\phi'(u)|dt.$$

sont de même nature. Si elles sont convergentes, elles sont égales.

Remarque 7.1 — Si ϕ est strictement décroissante, le résultat reste vrai cependant on a l'égalité

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\beta^\alpha f(\phi(u))\phi'(u)du = -\int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))|\phi'(u)|dt.$$

Remarque 7.2 — Les changement de variables affines $u = ax + b$ seront à savoir trouver vous même. Les autres vous seront indiqués.

Remarque 7.3 — En pratique, le changement de variable se fera de la même façon que sur un segment.

Exemple 5 — On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$, calculer pour tout $(m,\sigma) \in \mathbf{R}^2$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Exemple 6 — Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ est convergente. On réalisera la changement de variable $u = x^2$ puis une intégration parties, en accordant du soin aux choix des constantes d'intégration.

Une application du changement de variable est le théorème suivant qu'on peut utiliser directement.

Théorème 13

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$ qui est paire ou impaire. Alors

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ converge } \iff \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

et on a dans ce cas

1. si f est impaire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

2. si f est paire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$