

# Applications linéaires et endomorphismes

Dans tout le chapitre,  $E$ ,  $F$ , et  $G$  sont des espaces vectoriels.

## 1. CAS GÉNÉRAL

### 1.1. Définitions

#### Définition 1 | Applications linéaires

Une **application linéaire de  $E$  dans  $F$**  est une application  $u$  de  $E$  dans  $F$  qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

On remarque que que la condition est remplaçable par la combinaison des deux conditions :

1.  $\forall (x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y)$
2.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, u(\lambda x) = \lambda u(x)$ .

**Remarque 1.1** — La définition implique immédiatement que

$$u(0_E) = 0_F.$$



#### Notation

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

**Exemple 1** —

1. L'application nulle, notée  $0_{\mathcal{L}(E,F)}$  est l'application définie pour tout  $x \in E$  par  $u(x) = 0_F$ .
2. Si  $E = F = \mathbf{R}$ , on retrouve les **fonctions linéaires** :  $f(x) = ax$ .

### Exemple 2 — Identité, homothéties

1. Si  $E = F$ , l'application définie par

$$\forall x \in E, u(x) = x$$

est l'**application identité de E** ou l'**identité sur E**. On la note  $Id_E$ .

2. C'est un cas particulier des applications de la forme

$$\forall x \in E, u(x) = \lambda x$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Ces applications s'appellent les **homothéties**.  $\lambda$  est appelé le rapport de l'homothétie.

**Exemple 3** — Soit  $M \in M_{n,p}(\mathbf{R})$ , l'application  $u$  de  $E = M_{n,1}(\mathbf{R})$  dans  $F = M_{p,1}(\mathbf{R})$  définie par

$$\forall X \in E, u(X) = MX$$

est une application linéaire. En effet :

- Si  $X \in E$ , on a bien  $Y \in F$ .
- 

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

•

$$\forall (X, Y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R} : u(X + \lambda Y) = M(X + \lambda Y) = MX + \lambda MY = u(X) + \lambda u(Y).$$

**Exemple 4** — Soit  $n \geq 1$ . Si  $E = \mathbf{R}_n[x]$  et  $F = \mathbf{R}_{n-1}[x]$ , et  $u$  est définie par  $u(P) = P'$ .

- Si  $P \in E$ , on a  $\deg(P) \leq n$  et donc  $\deg(P') \leq n - 1$  donc  $u$  est bien à valeurs dans  $F$ .
- Si  $P = 0$ , on a bien  $u(P) = P' = 0$ .
- Soient  $P$  et  $Q$  dans  $E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , alors  $u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$ .

Ainsi  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Proposition 1**

$\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel. Autrement dit, si  $u$  et  $v$  sont des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $u + \lambda v$  aussi.

**Proposition 2 | Composée de deux applications linéaires**

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire. Autrement dit, si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ .

**Proposition 3 | Distributivité de la composition par rapport à l'addition**

Soient  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$  et  $\lambda, \mu$  des réels alors

$$(f_1 + \lambda f_2) \circ (g_1 + \mu g_2) = f_1 \circ g_1 + \mu f_1 \circ g_2 + \lambda f_2 \circ g_1 + \lambda \mu f_2 \circ g_2.$$

**Définition 2 | Isomorphisme**

Une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est un **isomorphisme** s'il existe  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que

$$v \circ u = Id_E \text{ et } u \circ v = Id_F.$$

On appelle alors  $v$  l'isomorphisme **inverse ou réciproque** de  $u$ .

**Proposition 4**

L'inverse d'une application linéaire, s'il existe, est unique.

**Notation**

L'inverse d'un isomorphisme  $u$  se note  $u^{-1}$ .

**Exemple 5** — Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors l'homothétie de rapport  $\lambda$  est un isomorphisme si et seulement si  $\lambda \neq 0$ . Son inverse est l'homothétie de rapport  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Théorème 1**

Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle est injective et surjective.

**Vocabulaire**

S'il existe un isomorphisme entre  $E$  et  $F$  on dit qu'ils sont **isomorphes**.

**Proposition 5**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a l'équivalence entre

1.  $\dim(E) = n$ ,
2. il existe un isomorphisme entre  $E$  et  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

L'isomorphisme est donné par l'application coordonnées dans une base fixée.

## 1.2. Noyau et image d'une application linéaire

### Définition 3 | Noyau d'un endomorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Le **noyau de  $u$** , noté  $\text{Ker}(u)$ , est l'ensemble défini par

$$\text{Ker}(u) = \{x \in E, u(x) = 0_F\}.$$

### Proposition 6

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  dans  $F$ , alors le noyau de  $u$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .



### Méthode (Déterminer le noyau d'une application linéaire)

On sait qu'on a toujours  $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u)$ . Pour obtenir  $\text{Ker } u$  on raisonne par équivalence : pour trouver une caractérisation des éléments du noyau ou même une base.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(u) &\iff u(x) = 0 \\ &= \dots \end{aligned}$$

### Proposition 7

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a

$$u \text{ est injective} \iff \text{Ker}(u) = \{0_E\}.$$



### Méthode (Montrer qu'une application linéaire est injective)

Pour montrer qu'une application linéaire est injective, on peut :

1. Suivre la démonstration de la méthode précédente, obtenir

$$x \in \text{Ker}(u) \iff x = 0_E.$$

2. Reasonner par implication et montrer que

$$x \in \text{Ker}(u) \Rightarrow x = 0_E.$$

Cela donne l'inclusion

$$\text{Ker } u \subset \{0_E\}.$$



Comme on a toujours l'inclusion réciproque on a alors égalité.

#### Définition 4 | Image d'une application linéaire

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on définit l'image de  $u$  par

$$\text{Im}(u) = u(E) = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

#### Proposition 8

$\text{Im}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

#### Proposition 9

$u$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(u) = F$ .



#### Méthode (Montrer qu'une application linéaire est surjective)

Pour montrer qu'une application linéaire est surjective :

1. soit pour tout  $y \in F$  fixé quelconque, on montrer qu'il admet un antécédent  $x \in E$  par  $u$ ,
2. si on a une base de  $F$ ,  $B = (f_1, \dots, f_n)$ , on montre que tout élément de  $B$  admet un antécédent par  $u$ .

### 1.3. Cas des endomorphismes

#### Définition 5 | Endomorphisme

Si  $u \in \mathcal{L}(E, E)$ , on dit que  $u$  est un **endomorphisme de  $E$** . Par simplicité, note plutôt  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphisme de  $E$ .

#### Proposition 10

$\mathcal{L}(E)$  est un espace vectoriel.



#### Attention

En général on n'a pas si  $f \circ g = g \circ f$  si  $f$  et  $g$  sont des endomorphisme de  $E$ . Si c'est le cas, on dit que  $f$  et  $g$  **commutent**.

Si  $u$  est un endomorphisme, alors on peut composer autant de fois  $u$  avec lui même que l'on veut, cela restera une application linéaire de  $E$  dans lui même.

**Définition 6 | Puissances d'un endomorphisme**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors on définit les puissances de  $u$  par :

- $u^0 = \text{Id}_E$ ,
- pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , par récurrence  $u^{n+1} = u \circ u^n$  ou encore

$$u^n = u \circ \dots \circ u \text{ avec } n \text{ fois l'endomorphisme } u,$$

- si  $u$  est un isomorphisme et si  $n < 0$ ,

$$u^n = (u^{-1})^{-n}.$$

**Exemple 6** — Soit  $M \in M_n(\mathbf{R})$  et  $u$  l'endomorphisme de  $M_{n,1}(\mathbf{R})$  défini par  $u(X) = MX$ .

1. Déterminer les puissances positives de  $u$ .
2. Montrer que  $u$  est inversible si et seulement si  $M$  est inversible.
3. Dans ce cas là, déterminer les puissances négatives de  $u$ .

**Exemple 7** — Soit  $u$  l'application de  $\mathbb{R}_n[x]$  définie par  $u(P) = P(x+1)$ . Déterminer les puissances de  $u$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on peut considérer ses puissances qui seront encore dans  $\mathcal{L}(E)$ . On peut aussi additionner ces puissances et les multiplier par des scalaires et rester dans  $\mathcal{L}(E)$  car c'est un espace vectoriel. On en déduit qu'on peut prendre un polynôme en  $u$ .

**Définition 7 | Polynôme d'un endomorphisme**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbf{R}[x]$ . On peut définir un le polynôme d'endomorphisme  $P(u)$  par

$$P(u) = \sum_{k=0}^n p_k u^k \text{ où}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k.$$

**Exemple 8** — Déterminer  $P(u)$  pour  $u$  l'endomorphisme de multiplication par une matrice carrée  $M$ .

**Définition 8 | Polynôme annulateur d'un endomorphisme**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbf{R}[x]$ . On dit que  $P$  est un **polynôme annulateur** de  $u$  (ou que  $P$  annule  $u$ ) si  $P(u)$  est l'endomorphisme nul  $0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Exemple 9** — Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer un polynôme annulateur de  $u \in \mathcal{L}(M_{2,1}(\mathbf{R}))$  défini par  $u(X) = MX$ . En déduire  $u^{-1}$ .

**Théorème 2**

Si un endomorphisme  $u$  admet un polynôme annulateur  $P$  tel que  $P(0) \neq 0$ , alors  $u$  est un isomorphisme de  $E$  et son inverse est donné par un polynôme en  $u$ . Plus précisément, si  $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  avec  $P(0) = p_0 \neq 0$ , alors on a

$$u^{-1} = -\frac{1}{p_0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} u^k \right).$$

**Remarque 1.2** — La formule précédente n'est pas à retenir, mais il faut savoir la retrouver. Par exemple si  $P(x) = x^2 - 4x + 2$  convient, alors

$$u^2 - 4u + 2Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

donc

$$u^2 - 4u = -2Id$$

donc

$$u \circ (u - 4Id) = -2Id$$

donc

$$u \circ \left( -\frac{1}{2}u + 2Id \right).$$

Ainsi  $u$  est inversible et  $u^{-1} = -\frac{1}{2}u + 2Id$ .

**Théorème 3 | Binôme de Newton pour des endomorphismes qui commutent**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k}.$$

## 1.4. Projecteurs associés à une somme directe

Dans cette-sous partie, on étudie une famille particulière d'endomorphisme qu'on appelle les projecteurs. C'est les endomorphismes qui admettent le polynôme  $x^2 - x$  comme polynôme annulateur. On en voit plusieurs caractérisations.

### Définition 9 | Projecteur associé à une somme directe

Si  $E$  se décompose comme la somme directe  $E = F \oplus G$ , alors le projecteur sur le sous-espace vectoriel parallèlement à  $G$  est l'application linéaire  $p$  définie par

$$\forall x \in E, p(x) = x_F \text{ où}$$

on a décomposé  $x = x_F + x_G$  comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ .

**Exemple 10** — Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  défini par

$$u((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Montrer que c'est un projecteur et déterminer les sous-espaces vectoriels à laquelle il est associé.

### Proposition 11

Soit  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $\text{Ker}(p) = G$  et  $\text{Im}(p) = F$ .

### Théorème 4 | Caractérisation des projecteurs

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $p$  est le projecteur associé à une somme directe si et seulement si  $p^2 = p$ .

### Proposition 12

Soit  $p$  un projecteur, alors  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ .

**Remarque 1.3** — Après avoir prouvé qu'un endomorphisme est un projecteur, on cherchera souvent la somme directe à laquelle il est associé en cherchant son noyau et son image (parfois à l'aide de la proposition précédente).

## 2. CAS DE LA DIMENSION FINIE

Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel **de dimension finie**.

### Proposition 13

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  alors si  $f \circ g = \text{Id}_F$  ou  $g \circ f = \text{Id}_E$  alors automatiquement on a l'autre égalité et alors  $f$  est inversible et  $f^{-1} = g$ .

### 2.1. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

#### Théorème 5 | Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  aussi et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

En particulier, si  $\dim(E) = n$ , alors

$$\dim \mathcal{L}(E) = n^2.$$

**Remarque 2.1** — Ce résultat sera prouvé dans le chapitre suivant.

### 2.2. Rang d'une application linéaire

Parmi tous les résultats techniques de ce chapitre, on n'oubliera pas celui-ci, qui découle directement des définitions.

### Proposition 14

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

Autrement dit,

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

**Remarque 2.2** — Cette famille ne sera pas forcément une base car elle ne sera pas forcément libre. Cependant, on pourra en extraire une base de l'image en retirant les vecteurs redondants.

**Définition 10 | Rang d'une application linéaire**

Le **rang** de l'application linéaire  $f$  est la dimension de  $\text{Im}(f)$ . On le note  $\text{rg}f$ .

**Remarque 2.3** — Ce sera donc le cardinal d'une famille libre maximale dans

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

**Exemple 11** — Déterminer une famille génératrice de l'image de

$$u : X \in M_{3,1}(\mathbf{R}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

**Méthode** (*Déterminer l'image et le rang d'une application linéaire en dimension finie*)



On signale que  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de l'image. On en extrait une **base** de l'image par les méthodes du premier semestre :

1. Si la famille est libre, il n'y a rien à faire, on a déjà une base.
2. Sinon, on retire des vecteurs un par un jusqu'à obtenir une famille libre et génératrice.

Le rang est alors le cardinal de la famille obtenue.

**Exemple 12** — Reprendre l'exemple précédent et déterminer le rang et une base de l'image de  $f$ .

### 2.3. Formule du rang et conséquences

#### **Théorème 6 | Formule du rang**

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker } f.$$

**Remarque 2.4** — Ce théorème est un des plus importants de l'année. Il conviendra de :

1. savoir, bien sûr, le citer **précisément**,
2. savoir reconnaître rapidement les circonstances où il est utile,
3. maîtriser les applications classiques que l'on va citer maintenant et savoir les utiliser rapidement.

**Méthode** (Obtenir le rang d'un endomorphisme en dimension finie par le calcul du noyau)



On calcule comme précédemment le noyau de l'endomorphisme, puis à l'aide de la formule du rang cela donne le rang.

## Application à la caractérisation des isomorphismes

### Proposition 15

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.

### Théorème 7

Soit  $f$  une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est un isomorphisme,
2.  $f$  est injectif,
3.  $f$  est surjectif.

**Remarque 2.5** — Quand on étudiera une telle application linéaire, en particulier dans le cas des endomorphismes, on aura bien à l'esprit ce théorème. Pour prouver l'isomorphisme il suffira de prouver l'injectivité (ce sera souvent le plus simple, mais pas à chaque fois), ou la surjectivité.

**Exemple 13** — Soit  $M \in M_n(\mathbf{R})$  inversible. Montrer que l'application  $u : X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \rightarrow MX$  est injective. En déduire qu'elle est surjective.

Pour conclure, le théorème suivant sera souvent utile.

### Théorème 8 | Caractérisation de propriétés par l'image d'une base

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors :

1.  $u$  est injective si et seulement si  $u(\mathcal{B})$  est libre,
2.  $u$  est surjective si et seulement si  $u(\mathcal{B})$  est libre,
3.  $u$  est bijective si et seulement si  $u(\mathcal{B})$  est une base.

## Application à l'étude des formes linéaires.

**Définition 11 | Forme linéaire**

Une **forme linéaire** est une application est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbf{R}$ .

**Exemple 14 — Formes coordonnées** Soit  $E = \mathbf{R}^n$ , alors l'application  $\phi_i$  définie par  $\phi_i(x) = x_i$  est une forme linéaire appelée forme linéaire coordonnée.

**Exemple 15 —** Soit  $E = \mathbf{R}^n$  alors toute application  $\phi$  définie par

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

est une forme linéaire.

**Vocabulaire (Hyperplan)**

Dans un espace vectoriel de dimension  $n$ , un **hyperplan** est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$ .

**Théorème 9**

Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. C'est à dire que si  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$  est une forme linéaire non nulle,

$$\dim \text{Ker } f = \dim E - 1$$

**Exemple 16 —**

1. Dans  $\mathbf{R}^3$ , quel est la dimension de

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0\}.$$

2. Après avoir montré que c'est un espace vectoriel, donner la dimension

$$F = \{M \in M_n(\mathbf{R}) : \sum_{i=1}^n m_{i,i} = 0\}.$$

**Définition 12 | Trace d'une matrice**

La trace d'une matrice  $M \in M_n(\mathbf{R})$  est définie par

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}.$$

**Théorème 10 | Propriétés de la trace**

L'application  $\text{Tr} : M \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \text{Tr}(M)$  est une forme linéaire. De plus elle vérifie :

1.  $\forall M \in M_n(\mathbf{R}), \text{Tr}({}^t M) = \text{Tr}(M)$ ,
2.  $\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{R})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .