

CHAPITRE 5

Fonctions usuelles

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1.1. Opérations sur les fonctions

Définition 1 | Fonction

Une **fonction** f , définie sur un ensemble E est l'objet mathématique qui à un nombre $x \in E$ associe une unique image $f(x)$. On note

$$f : x \in E \mapsto f(x)$$

ou

$$x \mapsto f(x)$$

pour dire que la fonction f associe le nombre $f(x)$ à x .



Vocabulaire

Si y est une valeur prise par la fonction f . Alors un réel $x \in E$ tel que $f(x) = y$ s'appelle un **antécédent de y par f** . A priori, un antécédent n'est pas unique : pour la fonction $x \mapsto x^2$, le réel 1 a deux antécédents 1 et -1 .



Attention

On ne parle pas de la "fonction $f(x)$ ". C'est se tromper dans la nature des objets. En effet f est une fonction alors que $f(x)$ est un nombre !

Définition 2 | Domaine d'une fonction

L'ensemble des réels pour lesquels la fonction est définie s'appelle le domaine de la fonction. Pour une fonction f on le note souvent D_f .

Remarque 1.1 — Si la fonction est définie par une formule, il est intéressant de trouver le plus grand ensemble possible sur lequel la fonction peut être définie.

Exemple 1 —

1. La fonction peut être définie par une formule. Par exemple sur $\mathbb{R}$ on définit la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = e^x - x^2.$$

On aurait aussi pu la définir sur tout domaine plus petit que $\mathbb{R}$.

Une fonction peut être définie avec des formules différentes sur différentes parties de $\mathbb{R}$, par disjonction de cas. Par exemple on peut écrire

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Une fonction peut être définie sur un ensemble fini auquel cas donner les valeurs en chaque nombre suffit. Par exemple la fonction h représentée par le tableau

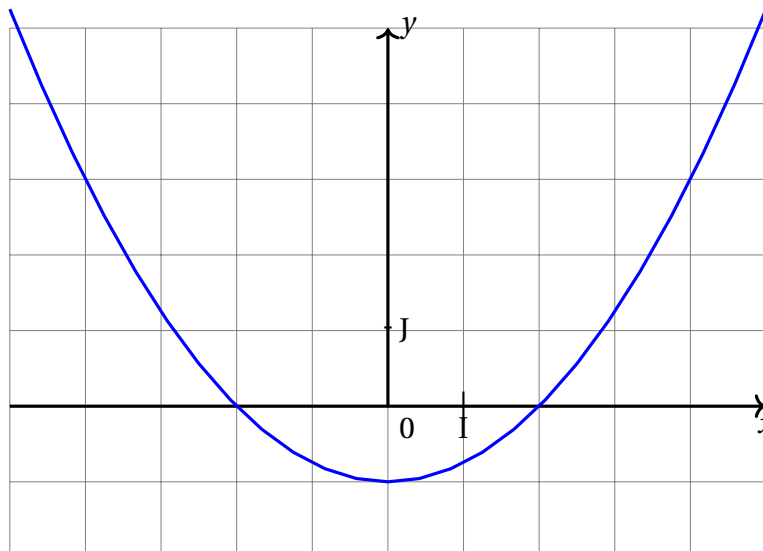
x	0	1	2	1000
h(x)	5	-1	12	0

est définie sur $\{0, 1, 2, 1000\}$ par $h(0) = 5$, $h(1) = -1$, $h(2) = 12$ et $h(1000) = 0$.

Remarque 1.2 — Les fonctions définies sur $\mathbb{N}$ sont les suites réelles.

Définition 3 | Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un domaine D_f . La courbe représentative de f , notée C_f est l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in D_f$, représentés dans un repère $(O; I; J)$ (en général orthonormé) du plan.

Exemple 2 —

On peut par exemple lire ici $f(2) = 0$ ou $f(4) = 3$.

Remarque 1.3 — Une fonction peut être définie par son graphe. On retrouve alors les images des points par lecture graphique.

Remarque 1.4 — La courbe représentative s'appelle aussi **le graphe de f** .

Définition 4 | Opérations sur les fonctions

Soient f, g deux fonctions définies **sur un même ensemble de départ** E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $f + g$ est la somme des fonctions f et g . C'est la fonction définie sur E par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. Cas particulier du cas précédent, $(f + \lambda)$ est la fonction définie sur E par $(f + \lambda)(x) = f(x) + \lambda$,
3. λf est la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,
4. fg est le produit des fonctions f et g . C'est une fonction définie sur E par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$,
5. Si g ne s'annule pas sur E , $\frac{f}{g}$ est le quotient de f par g . C'est la fonction définie par $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Remarque 1.5 — Toutes ces définitions permettent aussi de définir f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 — Donner un ensemble de définition pour

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}.$$

Définition 5 | Fonctions composées

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et g une fonction définie sur un ensemble F . Si f est à valeurs dans F (c'est dire que $\forall x \in E, f(x) \in F$), on peut définir la fonction composée de f par g sur E :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 4 — Prenons $f = \exp$ et $x \mapsto g(x) = x^2$. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies sur $\mathbb{R}$ avec

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = \exp(g(x)) = \exp(x^2)$,
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2 = \exp(x)^2 = \exp(2x)$.

**Attention**

Les exemples précédents montrent que $f \circ g \neq g \circ f$ (sauf cas particulier). La composition de fonction n'est pas commutative!

Pire, l'une peut-être définie et pas l'autre. Considérons par exemple les fonctions $x \mapsto f(x) = -x^2$ et $x \mapsto g(x) = \ln(x)$. $g \circ f$ n'existe pas!

Proposition 1 | Associativité de la composition

Si $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$ sont des fonctions alors On $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
On peut noter sans ambiguïté $h \circ g \circ f$.

Remarque 1.6 — Cette propriété nous sert car on peut calculer des compositions comme $f \circ g \circ h$ dans n'importe quel sens : on peut commencer par le calcul de $f \circ g$ ou celui de $g \circ h$. Quel choix ferait-on pour le calcul de $\exp \circ \ln \circ \sqrt{\cdot}$.

1.2. Fonctions bornées, fonctions monotones

Dans cette petite partie, les définitions sont analogues à celle que l'on avait sur les suites.

Définition 6 | Fonctions bornées

Soit f une fonction réelle définie sur I . On dit que f est :

1. **minorée** s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$,
2. **majorée** s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$,
3. **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarque 1.7 — L'ensemble des images des éléments de D_f par f s'appelle **l'image de D_f** . On note cet ensemble $f(D_f)$ et formellement il est défini par

$$f(D_f) = \{f(x), x \in D_f\}.$$

La notation se généralise aux sous-ensembles de D_f . Ainsi si $A \subset D_f$ on note

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

Cet ensemble s'appelle l'image (directe) de A par f .



Notation

Si f est majorée, alors l'ensemble $f(D_f)$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure. On note souvent

$$\sup_{x \in D_f} f(x) \text{ ou } \sup f.$$

On aura alors

$$\forall x \in D_f, f(x) \leq \sup_{x \in D_f} f(x).$$

De même, si f est minorée alors l'ensemble $f(D_f)$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne inférieure. On note souvent

$$\inf_{x \in D_f} f(x) \text{ ou } \inf f.$$

On aura alors

$$\forall x \in D_f, f(x) \geq \inf_{x \in D_f} f(x).$$

Proposition 2

Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Définition 7 | Minimum, maximum

Soit f une fonction de D_f dans $\mathbb{R}$. On dit que :

1. f admet un minimum si

$$\exists x_0 \in D_f, \forall x \in D_f, f(x) \geq f(x_0).$$

Dans ce cas là, $f(x_0)$ est le minimum de f et il est souvent noté

$$\min_{x \in D_f} f(x).$$

2. f admet un maximum si

$$\exists x_0 \in D_f, \forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0).$$

Dans ce cas là, $f(x_0)$ est le maximum de f et il est souvent noté

$$\max_{x \in D_f} f(x).$$

Remarque 1.8 — Une fonction f admet un maximum si et seulement elle est majorée et $\sup f$ admet un antécédent.

Définition 8 | Fonctions monotones

Soit f une fonction réelle définie sur I . On dit que f est :

1. **croissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$,
2. **décroissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$,
3. **strictement croissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$,
4. **strictement décroissante** (sur I) si pour tout a et b dans I tel que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$,
5. **monotone** (sur I) si elle est croissante ou décroissante sur I ,
6. **strictement monotone** (sur I) si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

1.3. Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition 9 | Fonctions paires, fonctions impaires

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbf{R}$ symétrique par rapport à 0 : si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$. La fonction f est dite :

1. **paire** si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$,
2. **impaire** si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

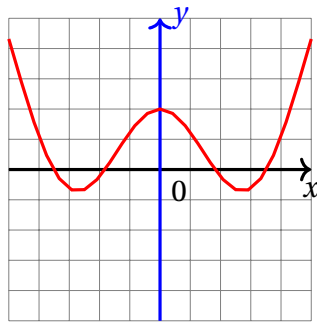
Définition 10 | Fonctions périodiques

Une fonction réelle est **périodique** s'il existe un réel $T > 0$ tel que

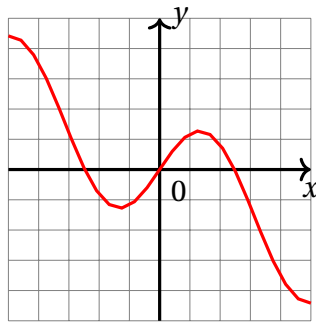
$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x + T) = f(x).$$

Proposition 3

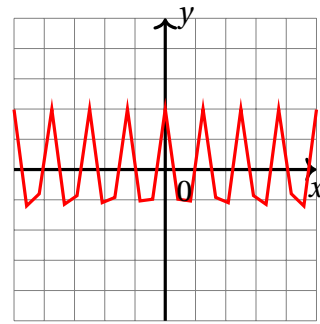
1. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
3. La courbe représentative d'une fonction périodique (de période T) est invariante par translation : les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(x - T)$ ont la même courbe représentative.



Fonction paire



Fonction impaire



Fonction périodique

Remarque 1.9 — Une fonction impaire définie en 0 vérifie forcément $f(0) = 0$ car $f(0) = -f(-0) = -f(0)$.

Exemple 5 —

1. la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto x + 3x^3$ est impaire,
2. la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto e^{x^2}$ est paire
3. la fonction $x \in]-1, 1[\mapsto \ln(1 - x^2)$ est paire.

Remarque 1.10 —

1. On dit aussi que la fonction est T -périodique, ou qu'elle admet T comme période, ou qu'elle est de période T .
2. T n'est pas unique : si f est T -périodique elle est forcément aussi $2T$ -périodique. On essaie de prendre la période la plus petite possible!

2. FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

2.1. Rappels : exponentielle et logarithme

Définition 11 | Exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée $\exp$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$. On note aussi $\exp(x) = e^x$.

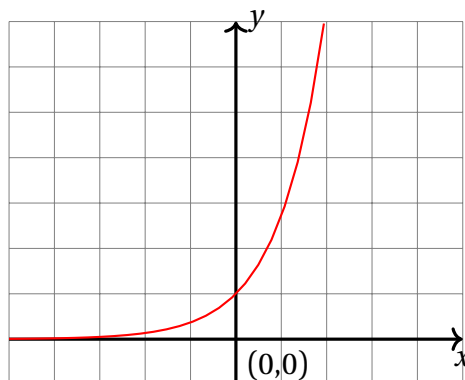
Proposition 4

Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

- $\exp(x) > 0$,
- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

Représentation graphique.



Exemple 6 — Résoudre l'équation

$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0.$$

Définition 12 | Logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$ la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

Remarque 2.1 — Une autre définition de la fonction logarithme est

$$\ln(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt.$$

Proposition 5

- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(e) = 1$,
- $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

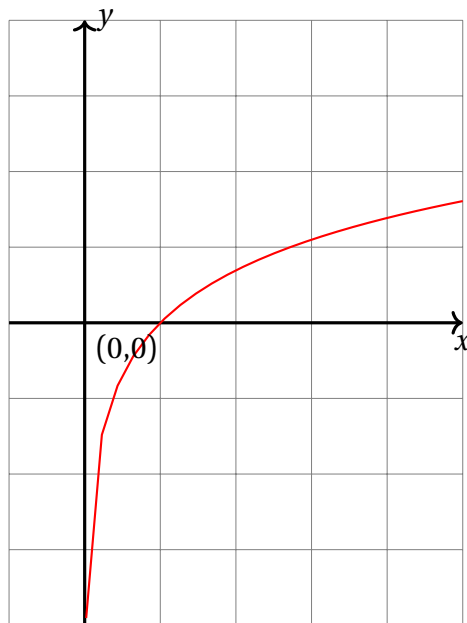
Proposition 6

Le logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	-0	1	$+\infty$

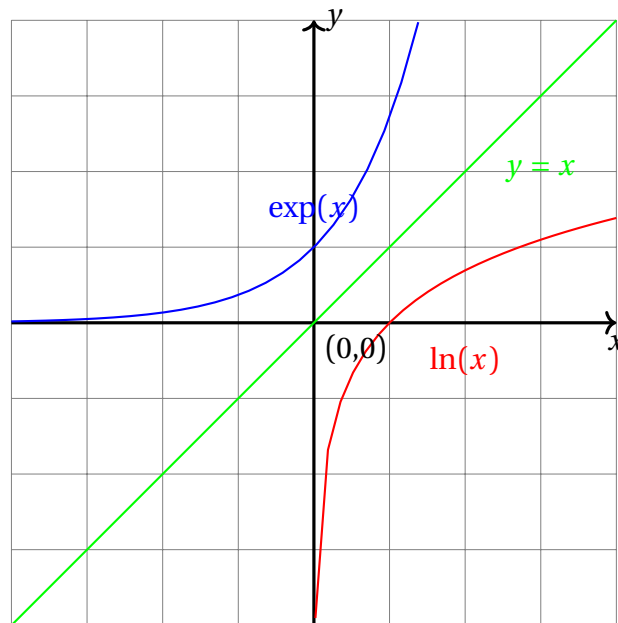
Représentation graphique.



Exemple 7 — Résoudre l'équation

$$2\ln(x) - \ln(3x) = 12.$$

Remarque 2.2 — Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques l'une de l'autre. Cela implique que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la diagonale d'équation $y = x$.



Généralisations

Définition 13 | Autres fonctions exponentielles

Si $a > 0$ on peut définir la fonction exponentielle de base a par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x = \exp(\ln(a)x)$$

qui définit

1. une bijection décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $0 < a < 1$,
2. une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ si $a = 1$,
3. une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $a > 1$.

Dans chacun des cas on dérive la fonction $f : x \mapsto e^{\ln(a)x}$. Par dérivation des fonctions composées on obtient

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \ln(a)e^{\ln(a)x}.$$

Ce qui nous assure déjà que :

1. si $a \in]0, 1[$, la fonction est strictement décroissante (car $f' < 0$)
2. si $a = 1$, la fonction est constante (car $f' = 0$)
3. si $a \in]1, +\infty[$, la fonction est strictement croissante (car $f' > 0$)

Cela traite complètement le cas 2. Pour les cas 1 et 3 on sait que la fonction réalise une bijection de son ensemble de départ sur son image que l'on détermine à partir des limites de la fonction exponentielle. Par exemple, si $a \in]0, 1[$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\ln(a)x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(a)x} = 0.$$

C'est donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0, +\infty[$.

Proposition 7

Ces fonctions exponentielles vérifient les mêmes propriétés que l'exponentielle classique : pour tout x, y réels,

1. $a^x > 0$,
2. $a^{x+y} = a^x a^y$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. si $p \geq 0$, $(a^x)^p = a^{px}$.

Définition 14 | Autres fonctions logarithmes

Si $a > 1$ on peut définir la fonction logarithme de base a par

$$x \in \mathbf{R} \mapsto \ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

qui définit bijection croissante $]0, +\infty[$ sur $\mathbf{R}$.

2.2. Fonctions puissances

Dans cette partie, on souhaite généraliser les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ que l'on connaît déjà. Cela se basera sur la formule suivante, vraie grâce aux formule de calcul sur les puissances :

$$x^n = \exp(n \ln(x)).$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbf{R}$, mais pour généraliser à des fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, avec α un réel, on va devoir se restreindre à $\mathbf{R}_+^*$.

Définition 15 | Fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit une **fonction puissance** sur $\mathbf{R}_+^*$ par la formule

$$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

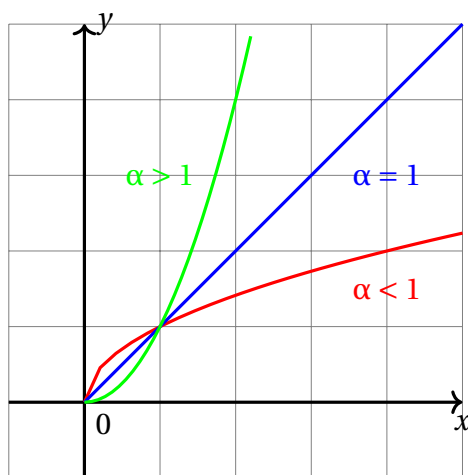
Ces fonctions ont un comportement différent en fonction du signe de α . On ne traite pas le cas $\alpha = 0$ car il est direct que cela correspond à une fonction constante égale à 1.

Cas $\alpha > 0$. Dans ce cas là, la fonction est définie sur $\mathbf{R}_+$.

Proposition 8

Pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $[0, +\infty[$ et réalise une bijection strictement croissante.

x	0	$+\infty$
x^α	0	$+\infty$



Remarque 2.3 — Soit $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont réciproques l'une de l'autre sur $]0, +\infty[$. Leurs courbes sont donc symétriques par rapport à l'axe d'équation $y = x$. C'est le cas sur la figure précédente.

Remarque 2.4 — Les tracés pour $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$ sont vraiment différents! Un chapitre ultérieur est consacré à la notion de convexité qui expliquera cela.

Remarque 2.5 — Pour $\alpha \geq 1$, les fonctions sont dérivables sur $[0, +\infty[$. Pour $\alpha < 1$, elles le sont uniquement sur $]0, +\infty[$. Cela se voit à la tangente verticale en 0.

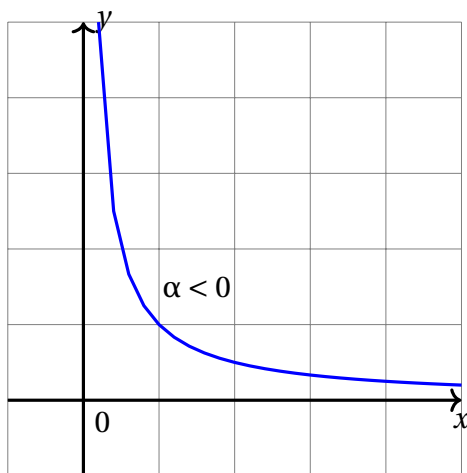
Exemple 8 — Les fonctions $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{N}$ rentrent dans cette catégories et son particulières car elles sont définies sur $\mathbf{R}$.

Exemple 9 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la fonction racine n -ième. On sait qu'elle est définie sur $\mathbf{R}_+$ et on a vu que dans le cas où n est impair, on peut aussi la définir sur $\mathbf{R}$.

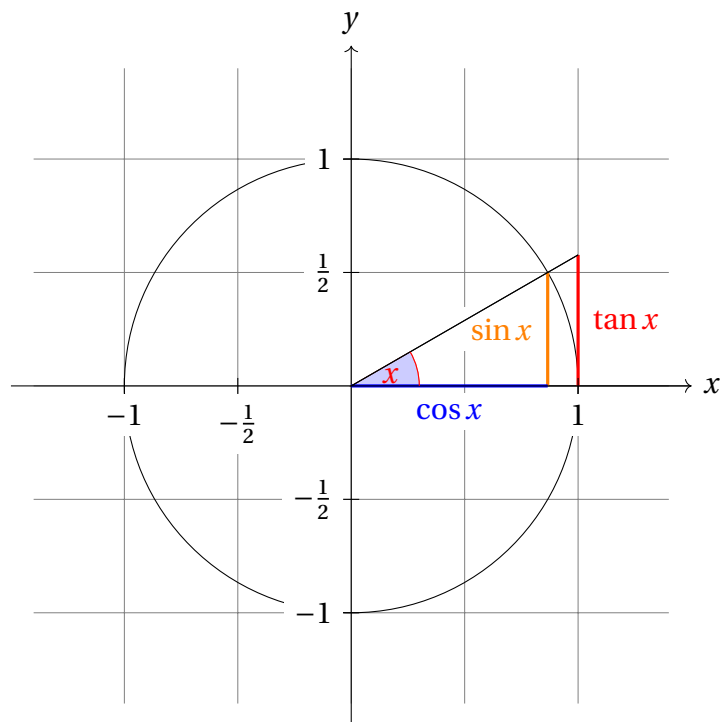
Cas $\alpha < 0$.**Proposition 9**

Pour $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $]0, +\infty[$ et réalise une bijection strictement décroissante de cet ensemble.

x	0	$+\infty$
x^α	$+\infty$	0

**2.3. Fonctions trigonométriques****Définition 16 | Fonctions cos et sin**

Le **cosinus** d'un nombre réel x (ou d'un angle exprimé en radians), est l'abscisse du point obtenu en reportant la longueur x le long du cercle unité (en partant du point $(0; 1)$). Le **sinus** d'un nombre est son ordonnée. On définit des fonctions réelles **cosinus** et **sinus** qui à un réel x associent ces nombres. On les note $\cos$ et $\sin$.



Des valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus sont à connaître.

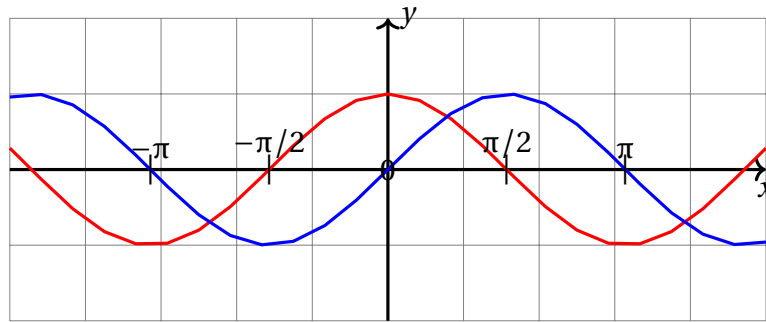
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour trouver les autres valeurs remarquables, on se réfère au cercle trigonométrique et aux égalités suivantes.

Proposition 10

Pour tout réel x ,

1. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
2. $\cos(-x) = \cos(x)$: la fonction cos est **paire**,
3. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
4. $\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sin est **impaire**.

**Proposition 11**

Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a les équivalences

- $\cos(x) = \cos(y) \iff \exists k \in \mathbf{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbf{Z}, x = -y + 2k\pi,$
- $\sin(x) = \sin(y) \iff x = y + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbf{Z}, x = \pi - y + 2k\pi.$

Exemple 10 — Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},$
2. $\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) = 1.$

Théorème 1

Pour tout réel x ,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Proposition 12

Pour tous réels a et b ,

1. $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b),$
2. $\sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b).$

Corollaire 1

Pour tout réel x ,

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x).$

Théorème 2

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:

1. $\cos'(x) = -\sin(x),$
2. $\sin'(x) = \cos(x).$

Définition 17 | Fonction tangente

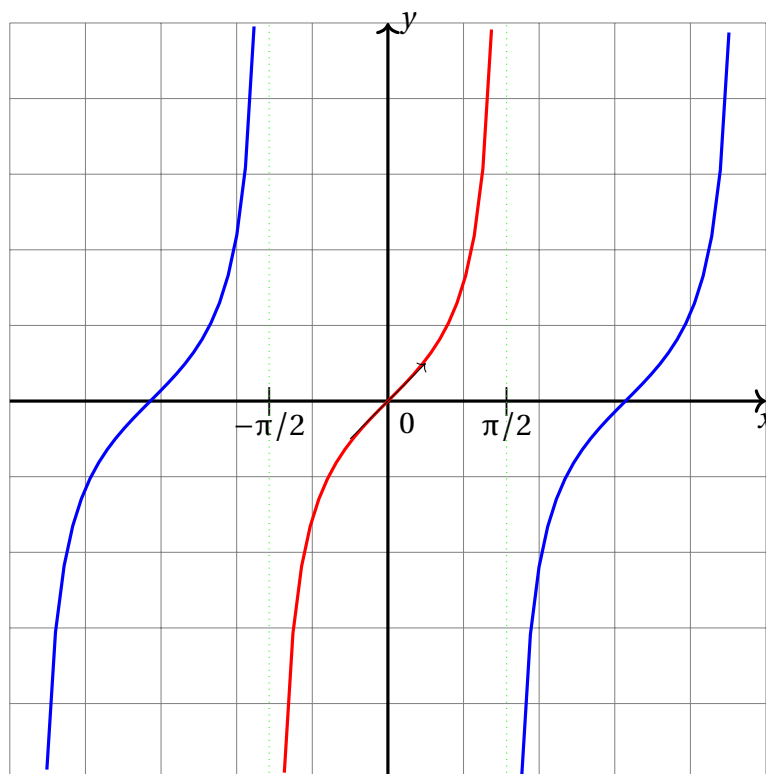
La fonction tangente, notée $\tan$ est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Théorème 3

La fonction tangente est une bijection strictement croissante de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\tan(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



Remarque 2.6 — Le tableau des valeurs remarquables se complète comme ceci. On prêtera particulièrement attention à la valeur $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Remarque 2.7 — La fonction tangente est impaire.

Définition 18 | Fonction Arctangente

La bijection réciproque de la fonction $\tan$ s'appelle la fonction **Arctangente**, note $\arctan$. Elle est définie sur $\mathbf{R}$ et réalise une bijection croissante vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème 4

1. La fonction $\tan$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ (où $k \in \mathbf{Z}$) et

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

2. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

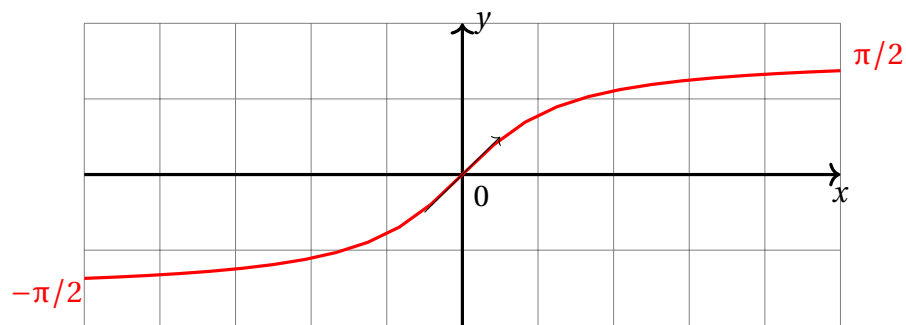
$$\forall x \in \mathbf{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Remarque 2.8 — On retiendra la formule de trigonométrie

$$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$

pour x réel qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. On peut dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe de la fonction $\arctan$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow 0 \longrightarrow$	$-\frac{\pi}{2}$



Remarque 2.9 — La fonction Arctangente est impaire.

Remarque 2.10 — On retiendra la valeur remarquable $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan'(0) = 1$.

Proposition 13

1. La fonction **cosinus** est 2π -périodique,
2. La fonction **sinus** est 2π -périodique,
3. La fonction **tangente** est π -périodique.

Exemple 11 — Déterminer une période de la fonction f définie par $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$.